Introdução ao Cálculo – Definição de Derivada

Reta Tangente

Material elaborado por Letícia Mattos.

Introdução ao Cálculo – Definição de Derivada
Reta tangente

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Para cada um dos itens a seguir, encontre a reta tangente à curva y no ponto P.

(a) $y(x) = x^{10}$ e $P = (1, 1)$.

(b) $y(x) = x^{-2}$ e $P = (2, 4^{-1})$.

(c) $y(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ e $P = (2, 0)$.

Exercício 2. Para cada $A \in \mathbb{Z}$, considere a função f_A dada por

$$f_A(x) = x^A.$$

(a) Prove que para todo $A \neq 0$, temos

$$f'_A(x) = Ax^{A-1}.$$

(b) Prove que para todos $A, B \in \mathbb{Z}$ e $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, a derivada da função $C_1 f_A + C_2 f_B$ é igual a

$$(C_1 f_A + C_2 f_B)'(x) = C_1 f'_A(x) + C_2 f'_B(x).$$

Exercício 3. Seja $A \in \mathbb{N}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^A.$$

Encontre $f'(1)$ em termos de A.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Sejam $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinômios tais que

$$\begin{cases} p'(2) = 0 \\ q'(2) = 3. \end{cases}$$

(a) Seja $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$r(x) = 4p(x) - 3x^4.$$

Encontre $r'(2)$.

(b) Seja $s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$s(x) = \frac{1}{2x^3} - 3q(x).$$

Encontre $s'(2)$.

Exercício 5. Seja y a curva dada por

$$y(x) = x^2 - 5x + 4.$$

Encontre todas as retas tangentes à essa curva que passam pela origem.

Exercício 6. Encontre todos os pontos que pertencem à curva

$$y(x) = x^4 - 2x^2 - x$$

e que possuem a mesma reta tangente.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

(a) Encontre todos os pontos sobre o gráfico de f cuja reta tangente é horizontal.

(b) Encontre todos os pontos sobre o gráfico de f cuja inclinação da reta tangente é igual a 7.

(c) Existem pontos sobre o gráfico de f cuja inclinação da reta tangente é indefinida? Justifique sua resposta.

Exercício 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz a identidade

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy^2 - 3x^2y + 2xy$$

para $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $f(0)$.

(b) Determine $f'(x)$ em função de x e $f'(0)$.

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = 6x^3 - x^2.$$

(a) Encontre a equação da reta tangente à f em todo ponto $(x, f(x))$.

(b) Seja r a reta tangente à f no ponto de abscissa $x = 1/4$. Prove que no intervalo $(0, 1)$ o gráfico de f está acima da reta r.

(c) Use os itens anteriores para resolver o seguinte exercício. Sejam a, b, c e d números reais positivos tais que $a + b + c + d = 1$. Prove que

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 8^{-1}.$$

Respostas e Soluções.

1.

(a) Temos que

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{10} - x^{10}}{h}$$

Agora, considere o polinômio $(x+h)^{10} - x^{10}$ na variável h. Ao expandirmos os binômios, vemos que h divide todos os termos. Porém, o único termo linear em h é $10hx^9$. Assim, o polinômio $(x+h)^{10} - x^{10}$ pode ser escrito como $(x+h)^{10} - x^{10} = 10hx^9 + h^2 \cdot t(x,h)$, onde $t(x,h)$ é um polinômio nas variáveis x e h. Segue que

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{10hx^9 + h^2 \cdot t(x,h)}{h} \\ &= 10x^9 + \lim_{h\to 0} h \cdot t(x,h) \\ &= 10x^9. \end{aligned}$$

Assim, a tangente à curva no ponto $(1,1)$ é 10. Concluímos que a equação da reta é dada por $y - 1 = 10(x-1)$, que é equivalente a $y = 10x - 9$.

(b) Temos que

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h}.$$

O quociente acima pode ser reescrito como

$$\frac{x^2 - (x+h)^2}{h\big((x+h)x\big)^2}.$$

Isso nos dá

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h\big((x+h)x\big)^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h\big((x+h)x\big)^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{\big((x+h)x\big)^2}. \end{aligned}$$

Observe que o último limite acima é igual a $-2x^{-3}$. Portanto, segue que $y'(x) = -2x^{-3}$.

Assim, a tangente à curva no ponto $(2, 4^{-1})$ é $-1/4$. Concluímos que a equação da reta é dada por

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{(x-2)}{4}, \tag{1}$$

que é equivalente a $y = -x/4 + 3/4$.

(c) Temos que

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h-2}{x+h-1} - \dfrac{x-2}{x-1}}{h}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x-1)(x+h-2) - (x-2)(x+h-1)}{h(x-1)(x+h-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x-1)(x+h-1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Assim, a tangente à curva no ponto $(2,0)$ é 1. Concluímos que a equação da reta é dada por $y - 0 = 1 \cdot (x-2)$, que é equivalente a $y = x - 2$.

2.

(a) Dividimos o problema em dois casos. O primeiro é quando $A > 0$. O primeiro passo é analisar o polinômio $(x+h)^A - x^A$ na variável h. Ao expandirmos os binômios, vemos que h divide todos os termos. Porém, o único termo linear em h é Ahx^{A-1}. Logo, podemos escrever

$$(x+h)^A - x^A = Ahx^{A-1} + h^2 \cdot t_A(x,h),$$

onde $t_A(x,h)$ é um polinômio nas variáveis x e h. Logo, segue que

$$\begin{aligned} f'_A(x) &= Ax^{A-1} + \lim_{h\to 0} h \cdot t_A(x,h) \\ &= Ax^{A-1}. \end{aligned}$$

O segundo caso é quando $A < 0$. Para simplificar a nossa análise, seja $B > 0$ tal que $A = -B$. Neste caso, o primeiro passo é analisar a expressão $(x+h)^{-B} - x^{-B}$, que pode ser escrita como

$$\frac{x^B - (x+h)^B}{(x+h)^B x^B}$$

Como vimos no primeiro caso, a expressão $(x+h)^B - x^B$ pode ser escrita como

$$(x+h)^B - x^B = Bhx^{B-1} + h^2 \cdot t_B(x,h),$$

onde $t_B(x,h)$ é um polinômio nas variáveis x e h. Assim, segue que

$$\begin{aligned} f'_A(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-B} - x^{-B}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-Bhx^{B-1} - h^2 \cdot t_B(x,h)}{h(x+h)^B x^B} \\ &= -Bx^{-B-1}. \end{aligned}$$

Como $B = -A$, segue que $f'_A(x) = Ax^{A-1}$.

(b) Denote por g a função dada por $C_1 f_A + C_2 f_B$. Assim, segue que

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Esse limite é igual a

$$C_1 \lim_{h\to 0} \frac{f_A(x+h) - f_A(x)}{h} + C_2 \lim_{h\to 0} \frac{f_B(x+h) - f_B(x)}{h}.$$

Portanto, segue que

$$g'(x) = C_1 f_A'(x) + C_2 f_B'(x).$$

3. Pelo Exercício 2, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1)' + (x)' + (x^2)' + \ldots + (x^A)' \\ &= 0 + 1 + 2x^2 + \ldots + Ax^{A-1}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} f'(1) &= 1 + 2 + \ldots + A \\ &= \frac{A(A+1)}{2}. \end{aligned}$$

4.

(a) Pelo Exercício 2, temos que $r'(x) = 4p'(x) - 12x^3$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} r'(2) &= 4p'(2) - 12(2)^3 \\ &= -96. \end{aligned}$$

(b) Pelo Exercício 2, temos que $s'(x) = -3x^{-4}/2 - 3q'(x)$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} s'(2) &= -3 \cdot 2^{-5} - 3q'(2) \\ &= -3 \cdot 2^{-5} - 9 \\ &= -291/32 \end{aligned}$$

5. Pelo Exercício 2, podemos ver que $y'(x) = 2x - 5$. Logo, a equação da reta tangente a y no ponto $(a, a^2 - 5a + 4)$ é dada por

$$y - a^2 + 5a - 4 = (2a - 5) \cdot (x - a).$$

Essa reta contém o ponto $(0,0)$ se e somente se

$$\begin{aligned} -a^2 + 5a - 4 = -2a^2 + 5a &\iff a^2 = 4 \\ &\iff a = \pm 2. \end{aligned}$$

Assim, as retas procuradas têm equações $r : y = -x$ e $s : y = -9x$.

6. Pelo Exercício 2, temos $y'(x) = 4x^3 - 4x - 1$. Logo, a equação da reta tangente a y no ponto $(a, a^4 - 2a^2 - a)$ é dada por

$$y - a^4 + 2a^2 + a = (4a^3 - 4a - 1)(x - a),$$

que é equivalente a

$$y = (4a^3 - 4a - 1)x - 3a^4 + 2a^2.$$

Para que tenhamos pontos com abscissas a e b com a mesma reta tangente, devemos satisfazer o sistema

$$\begin{cases} 4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b \\ 2a^2 - 3a^4 = 2b^2 - 3b^4. \end{cases} \tag{2}$$

Agora, dividimos o problema em dois casos:

1. $a^2 \neq b^2$. Nesse caso, observe que a segunda equação do sistema nos dá

$$2(a^2 - b^2) = 3(a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Como $a^2 - b^2 \neq 0$, segue que

$$a^2 + b^2 = \frac{2}{3}.$$

Por outro lado, a primeira equação do sistema nos dá

$$(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a - b.$$

Como $a \neq b$, segue que

$$a^2 + b^2 + ab = 1.$$

Assim, temos um novo sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{2}{3} \\ a^2 + b^2 + ab = 1. \end{cases}$$

Desse sistema segue que $ab = 1/3$. Assim, ficamos com

$$a^2 + \frac{1}{9a^2} = \frac{2}{3}.$$

Multiplicando ambos os lados da última equação por $9a^2$, segue que

$$9a^4 - 6a^2 + 1 = 0.$$

As soluções para essa equação são $a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Mas, isso nos daria $b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Isso é uma contradição, pois assumimos que $a^2 \neq b^2$.

2. $a = \pm b$. Neste caso, temos que $a = b = 0$ é uma solução, assim como $a = b$. Agora, assuma que $a = -b$ e que $a \neq 0$. A primeira equação do sistema (2) nos dá

$$\begin{aligned} a^3 - a = -a^3 + a &\iff a^2 = 1 \\ &\iff a \pm 1. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, suponha $a < b$. Da análise dos casos acima, concluímos que $a = -1$ e $b = 1$ são as únicas soluções. Isso corresponde aos pontos $(-1, 0)$ e $(1, -2)$.

7.

(a) Pelo Exercício 2, a derivada de f é dada por

$$f'(x) = 3x^2 - 4x.$$

Para que a reta tangente no ponto $(a, a^3 - 2a^2 + 1)$ seja horizontal, devemos ter $3a^2 - 4a = 0$. As únicas soluções dessa equação são $a_1 = 0$ e $a_2 = 4/3$. Assim, os pontos são $(0, 1)$ e $(4/3, -5/27)$.

(b) Como vimos no item anterior, temos $f'(x) = 3x^2 - 4x$. Assim, temos $f'(x) = 7$ se e somente se

$$3x^2 - 4x = 7 \iff a = -1 \text{ ou } a = 7/3.$$

Assim, segue que os pontos são $(-1, -2)$ e $(7/3, 76/27)$.

(c) Não existem pontos em f cuja inclinação da reta tangente é indefinida. Como vimos no item (a), para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$, a inclinação da reta tangente à curva f no ponto $(x, f(x))$ é igual a $3x^2 - 4x$.

8.

(a) Quando $x = y = 0$, temos $f(0) = 2f(0)$. Isto é, $f(0) = 0$.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + xh^2 - 3x^2h + 2xh}{h}. \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0$, esse limite é igual a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{xh^2 - 3x^2h + 2xh}{h}.$$

Logo, segue que

$$f'(x) = f'(0) + \lim_{h\to 0} \left(xh - 3x^2 + 2x\right),$$

o que nos dá

$$f'(x) = f'(0) - 3x^2 + 2x.$$

9.

(a) Pelo Exercício 2, a inclinação da reta tangente à f no ponto $(a, f(a))$ é igual a

$$f'(a) = 18a^2 - 2a.$$

Assim, segue que a equação da reta tangente é dada por

$$y - 6a^3 + a^2 = (18a^2 - 2a)(x - a),$$

que é equivalente a

$$y = (18a^2 - 2a)x - 12a^3 + a^2.$$

(b) Pelo item anterior, temos que a equação da reta r tangente a f no ponto $(1/4, f(1/4))$ é dada por

$$y = \frac{5x-1}{8}.$$

Para provar que no intervalo $(0, 1)$ o gráfico de f está acima da reta r, basta provar que

$$6x^3 - x^2 \geq \frac{5x-1}{8}$$

para todo $x \in (0, 1)$. A desigualdade acima é equivalente a

$$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0. \tag{3}$$

Podemos fatorar o lado esquerdo acima como

$$\begin{aligned} 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 &= (4x - 1)(12x^2 + x - 1) \\ &= (4x - 1)^2(3x + 1) \end{aligned}$$

Note que $(4x - 1)^2 \geq 0$ e $3x + 1 \geq 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Portanto, a quação (3) é de fato safisfeita. Isso prova que no intervalo $(0, 1)$ o gráfico de f está acima da reta r

(c) Para provar a desigualdade, basta provar que

$$6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq \frac{1}{8}. \tag{4}$$

Como $a, b, c, d \in (0, 1)$, pelo item anterior segue que

$$6x^3 - x^2 \geq \frac{5x-1}{8}$$

para todo $x \in \{a, b, c, d\}$. Assim, para provar que a equação (4) vale, é suficiente provar que

$$\frac{5a-1}{8} + \frac{5b-1}{8} + \frac{5c-1}{8} + \frac{5d-1}{8} \geq \frac{1}{8}$$

Como $a + b + c + d = 1$, é fácil ver que o lado esquerdo da desigualdade acima é igual a $1/8$. Assim, concluímos nossa prova.

Material elaborado por Letícia Mattos.