Trigonometria III

Funções Secante e Cossecante

2° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Trigonometria III
Funções Secante e Cossecante

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $\operatorname{sen} x < 0$ e $\sec x > 0$, então x é um arco do:

a) 1^o quadrante.

b) 2^o quadrante.

c) 3^o quadrante.

d) 4^o quadrante.

Exercício 2. Seja x um arco do 2^o quadrante e $\cos x = -\dfrac{1}{3}$, então $\operatorname{cossec} x$ é igual a:

a) $2\sqrt{2}$.

b) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

e) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercício 3. Se $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$, o maior valor possível da $\operatorname{cossec} x$ é:

a) 1.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{3}$.

d) 4.

e) 5.

Exercício 4. Seja a função $f(x) = 2 + \sec\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, definida em $[0, 2\pi] - A$. O conjunto A é composto por quantos elementos?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 5. Se $\sec x = 3$, sendo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{sen} x$ é:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

e) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Exercício 6. Determine o subconjunto mais amplo dos Reais que pode ser domínio da função $f(x) = 1 - 2\left|\sec\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$.

Exercício 7. Seja $\operatorname{sen} x = a$, então $\operatorname{cossec} x$ é:

a) a.

b) $-a$.

c) $\dfrac{1}{a}$.

d) a^2.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Mostre que $\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x$.

Exercício 9. Qual das expressões a seguir é idêntica a $\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cossec} x}$?

(a) $\operatorname{sen}^3 x$.

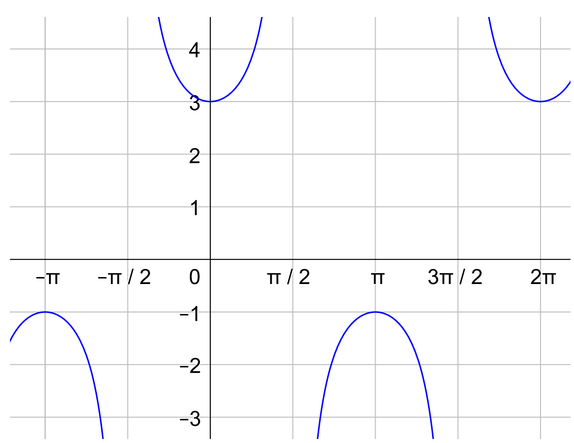
(b) $\cos^3 x$.

(c) $\operatorname{tg}^3 x$.

(d) $\operatorname{cossec}^3 x$.

(e) $\operatorname{cotg}^3 x$.

Exercício 10. Seja a função $f(x) = 1 - 2\operatorname{cossec}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ representada no gráfico. Se a imagem de f é $\mathbb{R} - A$, o conjunto A pode ser representado por:



a) $(0,2)$.

b) $(-1,3)$.

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Exercício 11. Sabendo que $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e que x está no 1^o quadrante, o valor de $\operatorname{cotg} x$ é:

a) $\frac{5}{2}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercício 12. O dobro do inverso da cossecante de um ângulo x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Determine $\cos x$.

Exercício 13. Sendo $f(x) = \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x$, o valor de $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ é:

a) $\sqrt{2}$.

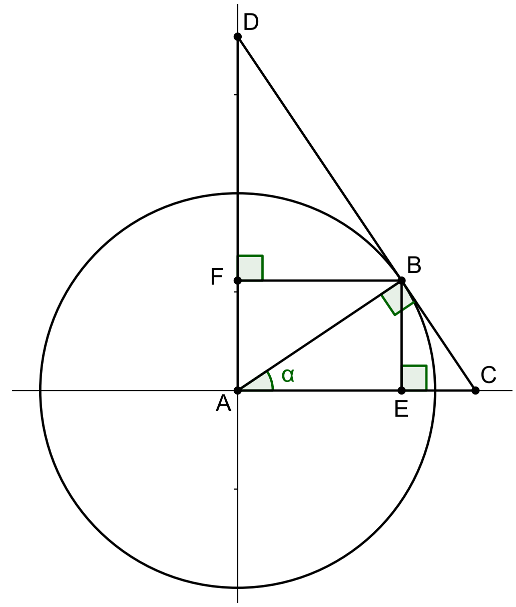
b) 2.

c) $-2\sqrt{2}$.

d) -1.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 14. Observe a figura cuja circunferência é o círculo trigonométrico. O segmento que representa $\sec \alpha$ é:



a) AB.

b) AC.

c) AD.

d) AE.

e) AF.

Exercício 15. O valor de $\sec \frac{\pi}{6} - \operatorname{cossec} \frac{7\pi}{4} + \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2}$ é

a) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{3}$.

b) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3}$.

c) $\frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3}$.

d) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Se $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \alpha < 0$ e $0 < \alpha < 2\pi$, então:

a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

e) não há α que satisfaz às condições propostas.

Exercício 17. Se $\operatorname{sen} x + \operatorname{cossec}(-x) = t$, então $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cossec}^2 x$ é:

a) igual a $t^2 - 2$.

b) igual a $t^2 + 2$.

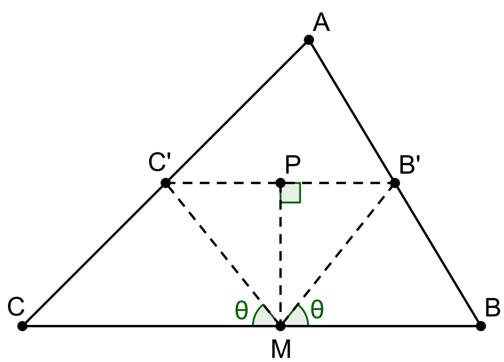
c) igual a t^2.

d) igual a 1.

e) impossível calcular.

Exercício 18. Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C', pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais θ, conforme a figura. Demonstre que

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$



Exercício 19. Determine todos os valores de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que a equação (em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ admita apenas raízes reais simples.

Exercício 20. Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \cdot \operatorname{tg} t + 1$ e $y^2 = b^2 \cdot \sec^2 t - b^2$, em que $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Então uma relação entre x e y é dada por:

a) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2$, $x \geq a$.

b) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2$, $x \geq 1$.

c) $y = \frac{b}{a^2}(x-1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) $y = \frac{b}{a^2}(x-1)$, $x \geq 1$.

e) $y = \frac{b^2}{a^2}(x-1)$, $x \leq 1$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. D.

2.

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2 &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2+\frac{1}{9} &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2 &= \frac{8}{9}\\ \operatorname{sen} x &= \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Como x é um arco do 2^o quadrante, então $\operatorname{sen} x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, segue que $\operatorname{cossec} x=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Resposta C.

3. Temos:

$$\begin{array}{ccccc}\dfrac{\pi}{4} & \leq & x & \leq & \dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \leq & \operatorname{sen} x & \leq & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \leq & \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} & \leq & \dfrac{2}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \leq & \operatorname{cossec} x & \leq & \sqrt{2}\end{array}$$

Portanto, o maior valor da $\operatorname{cossec} x$ é $\sqrt{2}$. Resposta B.

4. Seja $k\in\mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned}2x-\frac{\pi}{3} &\neq k\pi\\ 2x &\neq \frac{\pi}{3}+k\pi\\ x &\neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}.\end{aligned}$$

Sendo assim, $k=\{0,1,2,3\}$, ou seja, o conjunto A possui 4 elementos. Resposta D.

5. Como $\sec x=3$, então $\dfrac{1}{\cos x}=3$, segue que $\cos x=\dfrac{1}{3}$. Temos, então:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2 &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2+\frac{1}{9} &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2 &= \frac{8}{9}\\ \operatorname{sen} x &= \frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Resposta D.

6. Como $\sec\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$, então $x+\dfrac{\pi}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, segue que $x\neq k\pi$, onde $k\in\mathbb{Z}$. Portanto, o subconjunto de $\mathbb{R}$ mais amplo que pode ser domínio de f é $\mathbb{R}-\{k\pi\}$, com $k\in\mathbb{Z}$.

7. C.

8. Pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2 &= 1\\ \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2}+\frac{(\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x)^2} &= \frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2}\\ 1+(\operatorname{cotg} x)^2 &= (\operatorname{cossec} x)^2.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{cossec} x} &=\\ \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} &=\\ \frac{\cos^2 x}{\dfrac{1}{\cos x}} &= \cos^3 x\end{aligned}$$

Resposta B.

10. O conjunto A pode ser representado por:

$$\begin{array}{ccccc}-1 & < & \operatorname{cossec}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & < & 1\\ -2 & < & 2\operatorname{cossec}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & < & 2\\ -2 & < & -2\operatorname{cossec}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & < & 2\\ -1 & < & 1-2\operatorname{cossec}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & < & 3\end{array}$$

Resposta B.

11. Como $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e $x\in 1^o$ quadrante, temos:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)^2+(\cos x)^2 &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2+\frac{5}{9} &= 1\\ (\operatorname{sen} x)^2 &= \frac{4}{9}\\ \operatorname{sen} x &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{cotg} x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Resposta E.

12. (Extraído da FUVEST - SP - Adaptado) Construindo a equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{1}{\text{cossec}\,x} &= 3\cdot(\text{tg}\,x)^2\\ 2\cdot\text{sen}\,x &= 3\cdot\left(\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)^2\\ 3(\text{sen}\,x)^2-2\,\text{sen}\,x(\cos x)^2 &= 0\\ \text{sen}\,x(3\,\text{sen}\,x-2(\cos x)^2) &= 0. \end{aligned}$$

Como chegamos a um produto de dois termos igual a zero, temos que $\text{sen}\,x=0$, que não convém pois $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, ou $3\,\text{sen}\,x-2\cos^2 x=0$, donde:

$$\begin{aligned} 3\,\text{sen}\,x-2(\cos x)^2 &= 0\\ 3\,\text{sen}\,x-2(1-(\text{sen}\,x)^2) &= 0\\ 2(\text{sen}\,x)^2+3\,\text{sen}\,x-2 &= 0\\ \text{sen}\,x &= \frac{-3\pm 5}{4}. \end{aligned}$$

Como a única solução que nos convém é $\text{sen}\,x=\dfrac{1}{2}$ e $x\in 1^o$ quadrante, $x=30^o$ e, consequentemente, $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Temos que:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) &= \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+2\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= \text{cossec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= -\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Resposta C.

14. B.

15.

$$\begin{aligned} \sec\frac{\pi}{6}-\text{cossec}\,\frac{7\pi}{4}+\text{cotg}\,\frac{3\pi}{2} &=\\ \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}}+0 &=\\ \frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{2}} &=\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2} &=\\ \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Resposta A.

16. (Extraído da Fatec - SP) Como $\text{tg}\,\alpha\cdot\sec\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}<0$, então $\text{sen}\,\alpha<0$, pois $\cos^2\alpha>0$. Consequentemente, $\cos\alpha<0$, já que $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha>0$. Portanto, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Resposta C.

17. (Extraído da UFSCar - SP) Temos:

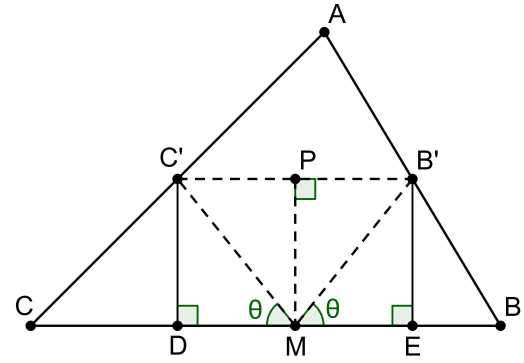
$$\begin{aligned} \text{sen}\,x+\text{cossec}(-x) &= t\\ \text{sen}\,x-\text{cossec}\,x &= t\\ (\text{sen}\,x-\text{cossec}\,x)^2 &= t^2\\ (\text{sen}\,x)^2-2\,\text{sen}\,x\,\text{cossec}\,x+(\text{cossec}\,x)^2 &= t^2\\ (\text{sen}\,x)^2-2\,\text{sen}\,x\cdot\frac{1}{\text{sen}\,x}+(\text{cossec}\,x)^2 &= t^2\\ (\text{sen}\,x)^2-2+(\text{cossec}\,x)^2 &= t^2\\ (\text{sen}\,x)^2+(\text{cossec}\,x)^2 &= t^2+2. \end{aligned}$$

Resposta B.

18. (Extraído do IME) Vamos traçar as alturas MP, $C'D$ e $B'E$ nos triângulos $MB'C'$, MCC' e MBB' respectivamente. Se B' e C' são pontos médios dos lados AB e AC do triângulo ABC, então $B'C'$ é base média deste triângulo e mede a metade de BC além ser um segmento paralelo a este. Pelo triângulo DCC', temos que $\text{cotg}\,C=\dfrac{CD}{PM}$; pelo triângulo EBB', $\text{cotg}\,B=\dfrac{BE}{PM}$; pelos triângulos EMB' e DMC', $\text{cotg}\,\theta=\dfrac{ME}{PM}=\dfrac{MD}{PM}$, segue que:

$$\begin{aligned} 2\,\text{cotg}\,\theta &= \frac{ME+MD}{PM}\\ &= \frac{C'B'}{PM}\\ &= \frac{CD+BE}{PM}\\ &= \frac{CD}{PM}+\frac{BE}{PM}\\ &= \text{cotg}\,C+\text{cotg}\,B. \end{aligned}$$

Por fim, $\text{cotg}\,\theta=\dfrac{1}{2}(\text{cotg}\,B+\text{cotg}\,C)$.



19. (Extraído do ITA) Fazendo $x^2 = y$, temos $y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + \operatorname{tg}\alpha = 0$ e, consequentemente, as raízes desta equação devem ser reais distintas, ou seja, $(2\sqrt[4]{3})^2 - 4\operatorname{tg}\alpha > 0$, segue que $\operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$. Além disso, as raízes da equação em y devem ser positivas, sendo que sua soma é $2\sqrt[4]{3} > 0$, então seu produto, que é $\operatorname{tg}\alpha$, deve ser positivo, ou seja, $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Sendo assim, $0 < \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$, donde, pelo intervalo proposto no problema, temos $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$.

20. (Extraído do ITA) Se $x = a^2\operatorname{tg} t + 1$, então $\dfrac{(x-1)^2}{a^4} = \operatorname{tg}^2 t$ e, se $y^2 = b^2\sec^2 t - b^2$, então $\dfrac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - 1$. Sabemos que $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, ou seja, $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(x-1)^2}{a^4}$, que, para $x \geq 1$, chegamos a $y = \dfrac{b(x-1)}{a^2}$. Resposta D.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com