

Módulo de Razões e Proporções

Propriedades de Proporções

7º ano E.F.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A primeira fase da Olimpíada de Matemática contou com a participação de 520 mil alunos. Os organizadores determinaram que a proporção entre aprovados e reprovados fosse de 3 para 7. Quantos estudantes passarão para a próxima fase da Olimpíada?

Exercício 2. Uma receita para fazer um bolo grande leva 8 ovos e 6 xícaras de açúcar. Sem essas quantidades o bolo não fica pronto no tamanho adequado.

- Se quisermos mudar a quantidade de bolos desse tipo feitos, as quantidades de ovos e xícaras serão alteradas de modo proporcional? Caso sim, defina o tipo (direto ou inverso) de proporção.
- Se quisermos fazer quatro bolos grandes, quantos ovos e quantas xícaras de açúcar serão necessários?
- Se quisermos fazer a mesma receita reduzindo o tamanho do bolo e usando apenas 3 ovos, qual a quantidade correta de açúcar?

Exercício 3. Uma indústria de bebidas criou um brinde para seus clientes com a forma exata da garrafa de um de seus produtos, mas com medidas reduzidas a 20% das originais.

- Que tipo de proporcionalidade direta existe nesse problema: linear, superficial ou volumétrica?
- Se em cada garrafinha brinde cabem 7 ml de bebida, qual a capacidade da garrafa original?

Exercício 4. A soma das notas obtidas por Fausto nas provas A , B e C de anatomia é igual a 170 pontos, sendo a diferença entre a maior e a menor nota igual a 50 pontos. Sabe-se que as notas são distintas, expressas em múltiplos de 10, e que nenhuma delas foi zero. Para a obtenção da média final, a menor nota pode ser eliminada e a nota final é o resultado da divisão do dobro da maior nota somado com a outra nota e dividido por três. Nessas condições, qual a média final de Fausto nessa disciplina?

Exercício 5. Semanalmente, o apresentador de um programa televisivo reparte uma mesma quantia em dinheiro igualmente entre os vencedores de um concurso. Na semana passada, cada um dos 15 vencedores recebeu R\$ 720,00. Nesta semana, houve 24 vencedores; portanto, qual a quantia, em reais, recebida por cada um deles?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial fixo, chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional aos quilômetros percorridos. Se por uma corrida de 8 km paga-se R\$ 28,50 e por uma corrida de 5 km paga-se R\$ 19,50, então:

- quais as grandezas diretamente proporcionais nessa situação problema?
- qual o valor da bandeirada?

Exercício 7. A proporção entre as medalhas de ouro, prata e bronze de um atleta é 3 : 4 : 7, respectivamente. Quantas medalhas de ouro, prata e bronze espera-se que esse atleta obtenha em 70 jogos, se essa proporção se mantiver e ele conquistar medalhas em todos os jogos?

Exercício 8. A fábrica do Sr. Eusébio possui 12 máquinas, de mesmo tipo e capacidade, que usualmente executam determinada tarefa em 16 dias, funcionando 6 horas por dia. Como quatro dessas máquinas ficaram inutilizadas, as restantes passaram a ser colocadas em funcionamento 8 horas por dia. Nessas condições:

- o tempo (em dias) é direta ou inversamente proporcional à quantidade de máquinas para se realizar um determinado trabalho?
- o tempo (em horas) é direta ou inversamente proporcional à quantidade de máquinas para se realizar um determinado trabalho?
- em quanto tempo a mesma tarefa será executada?

Exercício 9. A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$. Se a soma das duas idades é igual a 55 anos, então qual a idade de Pedro?

Exercício 10. A maquete de um barco foi feita na escala linear para comprimentos de 1:50. A maquete foi feita com o mesmo material com que será construído o barco. Se a massa da maquete é de 800 gramas, então qual a massa do barco, em toneladas?

Exercício 11. A Dra. Judith sempre atende, no seu consultório, o mesmo número de pacientes a cada turno de quatro horas de trabalho. Ela percebeu que, gastando em média vinte e cinco minutos para atender cada paciente, sempre trabalhava 1 hora além do seu expediente. Para que ela atenda o mesmo número de pacientes e cumpra exatamente o horário previsto para cada turno, o atendimento por cada paciente deve durar, em média, quantos minutos?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Considere 3 trabalhadores. O segundo e o terceiro, juntos, podem completar um trabalho em 12 dias. O primeiro e o terceiro, juntos, podem fazer o mesmo trabalho em 10 dias, enquanto que o primeiro e o segundo, juntos, podem fazê-lo em 15 dias. Em quantos dias, os três juntos podem fazer o mesmo trabalho?

Exercício 13. Em determinada fase do desenvolvimento de uma criança existe, entre ela e seu pai, uma semelhança matemática, entre várias grandezas como altura, comprimento das pernas e massa corpórea (que corresponde matematicamente ao volume de um corpo). Sabendo que as alturas do pai e da criança são, respectivamente, 1,80 m e 1,38 m e que o pai tem 75 kg de massa corpórea, qual o valor que pode-se concluir aproximadamente para a massa corpórea dessa criança, em kg?

Respostas e Soluções.

1. Sejam A e R as quantidades de estudantes aprovados e reprovados, respectivamente. Do enunciado podemos concluir que $A + R = 520$ mil e $\frac{A}{R} = \frac{3}{7}$. A segunda equação pode ser reescrita como $\frac{A}{3} = \frac{R}{7} = \frac{A+R}{3+7}$. Assim, fazemos $\frac{A}{3} = \frac{A+R}{10} = \frac{520}{10}$, o que conclui $A = 156$ mil estudantes.

2. O enunciado define que um bolo grande leva 8 ovos e 6 xícaras de açúcar.

a) A proporcionalidade é direta em função da condição dada de que sem essas quantidades o bolo não fica pronto no tamanho adequado.

b) Usando a proporcionalidade direta, para fazermos quatro bolos precisaremos de 32 ovos e 24 xícaras de açúcar.

c) Usando a proporcionalidade direta, para fazer um bolo menor com $8 \cdot \frac{3}{8} = 3$ ovos usaremos $6 \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, ou seja, duas xícaras mais um quarto de xícara.

3. (Adaptado do vestibular da ESPM SP – 2014)
O enunciado define que o modelo reduzido tem a forma exata do produto original. Destacando agora a relação da redução de todas as medidas (geometria espacial).

a) A proporcionalidade direta é volumétrica.

b) Do enunciado temos que a redução a $20\% = 0,2$ de todas as medidas, resulta num brinde com capacidade para 7 ml e pelo item anterior podemos ajustar o volume V original para ser calculado como

$$\frac{V}{7} = \left(\frac{1}{0,2}\right)^3$$
$$V = 875\text{ ml}.$$

4. (Extraído do site Tutor Brasil)

Supondo $A < B < C$, do enunciado temos que $A + B + C = 170$, $C - A = 50$ e $A = 10a$, $B = 10b$ e $C = 10c$, com a , b e c inteiros distintos. O objetivo final é calcular $\frac{B+C}{2} = \frac{10b+10c}{2} = 5b+5c$. Agora, podemos escrever $10a + 10b + 10c = 170$ ou $a + b + c = 17$ e $10c - 10a = 50$ ou $c - a = 5$.

5. (Adaptado do vestibular da UNESP SP – 2014)
Podemos calcular o total do prêmio como $15 \cdot 720 = 10800$ reais. Agora, a quantia para a semana indicada fica $\frac{10800}{24} = 450$ reais.

6. (Adaptado do vestibular da UECE CE – 2014)

a) A proporcionalidade direta envolve o valor pago pelo deslocamento (sem contar a bandeirada) em função da quantidade de quilômetros rodados.

b) Perceba que a diferença de 3 km na corrida gerou 9 reais a mais, o que conclui que o preço por quilômetro é de 3 reais. Assim, em 8 km temos 24 reais pelo deslocamento e R\$ 4,50 de bandeirada. Ou ainda, na segunda situação, por 5 km pagaríamos 15 reais e para R\$ 19,50 faltam exatamente 4 reais e 50 centavos, que é o valor da bandeirada.

7. Destaquemos cada cor de medalha pela respectiva inicial. Assim, temos

$$\begin{cases} \frac{o}{3} = \frac{p}{4} = \frac{b}{7} \\ o + p + b = 70 \end{cases}$$

Agora, podemos desenvolver

$$\frac{o}{3} = \frac{p}{4} = \frac{b}{7} = \frac{o+p+b}{3+4+7} = \frac{70}{14} = 5,$$

e daí

$$\begin{array}{lll} \frac{o}{3} = 5 & \frac{p}{4} = 5 & \frac{b}{7} = 5 \\ o = 15 & p = 20 & b = 35 \end{array}$$

8. (Adaptado do vestibular da USP SP – 2014)

a) Com máquinas trabalhando numa velocidade de produção constante, o tempo em dias será inversamente proporcional à quantidade máquinas (no popular, quanto mais máquinas, menos dias de trabalho serão necessários).

b) Com máquinas trabalhando numa velocidade de produção constante, o tempo em horas será inversamente proporcional à quantidade máquinas (no popular, quanto mais máquinas, menos dias de trabalho serão necessários).

c) Num dia de trabalho de 6 horas, 12 máquinas executam $\frac{1}{16}$ da tarefa, ou uma máquina faz $\frac{1}{16 \cdot 12} = \frac{1}{192}$ do trabalho, ou ainda $\frac{1}{192 \cdot 6} = \frac{1}{1152}$ do trabalho numa hora de trabalho. Agora, ficando apenas 8 máquinas trabalhando 8 por dia, em um dia de trabalho será feito $\frac{8 \cdot 8}{1152} = \frac{1}{18}$ do trabalho, ou seja, a conclusão será em 18 dias.

9. (Adaptado do vestibular da UNICAMP SP – 2014)
 Sendo x e y as idades de Pedro e de seu pai, podemos escrever que $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$ e $x + y = 55$. Reescrevendo a primeira igualdade ficamos com

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{9}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{9} = \frac{x+y}{2+9} = \frac{55}{11} = 5$$

$$\frac{x}{2} = 5 \text{ o que implica } x = 10 \text{ e}$$

$$\frac{y}{9} = 5 \text{ o que gera } y = 45.$$

Assim, a idade de Pedro é igual a 10 anos.

10. (Adaptado do vestibular da FAMECA SP – 2014)
 Uma proporção que relaciona medida linear com medida de massa. Sendo assim, podemos escrever

$$\frac{800}{x} = \left(\frac{1}{50}\right)^3$$

$$x = 800 \cdot 125 \cdot 10^3 \text{ g.}$$

$$x = 10^8 \text{ g} = 100 \text{ ton.}$$

11. (Adaptado do vestibular da IFPE PE – 2014)
 Dona Judith trabalha $4 \cdot 60 = 240$ minutos mais a hora extra, totalizando 300 minutos por dia. Atendendo por 25 minutos cada paciente, numa jornada há $\frac{300}{25} = 12$ pacientes. Para que ela atenda todos em 240 minutos, cada consulta poderá ter $\frac{240}{12} = 20$ minutos.

12. (Adaptado do vestibular da UNIFOR CE – 2014)
 Sejam A , B e C os três trabalhadores citados. Podemos escrever que ao final de um dia cada dupla cumpriu as seguintes frações do trabalho:

$$B + C = \frac{1}{12}$$

$$A + C = \frac{1}{10}$$

$$A + B = \frac{1}{15}.$$

Somando as igualdades chegamos a

$$2A + 2B + 2C = \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \quad (1)$$

$$2 \cdot (A + B + C) = \frac{5+6+4}{60} \quad (2)$$

$$2 \cdot (A + B + C) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$A + B + C = \frac{1}{8}, \quad (4)$$

ou seja, em um dia de trabalho os três juntos cumprem $\frac{1}{8}$ da tarefa e, mantendo esse ritmo, terminarão o trabalho em 8 dias.

13. (Adaptado do vestibular da Fac. de Ciências da Saúde de Barretos SP – 2014)

Sendo m o valor da massa da criança, a semelhança pode ser escrita como

$$\frac{m}{75} = \left(\frac{1,38}{1,80}\right)^3$$

$$\frac{m}{75} = \left(\frac{23}{30}\right)^3$$

$$V \cong 34 \text{ kg.}$$