Módulo de Introdução à Probabilidade

O que é Probabilidade?

2^a série E.M.

Probabilidade
O que é Probabilidade?

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual a probabilidade de, aleatoriamente, escolhermos um número par entre os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 21, 22, 23\}$?

Exercício 2. Em uma urna há 72 bolas idênticas mas com cores diferentes. Há bolas brancas, vermelhas e pretas. Ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade de ela ser branca é $1/4$ e a probabilidade de ela ser vermelha é $1/3$. A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna é
a) 12. b) 10. c) 8. d) 6. e) 4.

Exercício 3. Sandra comprou uma caixa de balas sortidas. Na caixa, havia 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina. A probabilidade de Sandra escolher na caixa, ao acaso, uma bala de tangerina é
a) $1/7$. b) $1/6$. c) $1/5$. d) $1/4$. e) $1/3$.

Exercício 4. Com dados do último censo, a Assistente Social de um Centro de Saúde constatou que das famílias da região, 20% não tem filhos, 30% , apenas um filho, 35%, exatamente dois filhos e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro e cinco filhos. Suponha que uma família dessa região é escolhida, aleatoriamente, nessa região, e o número de filhos é averiguado. Qual a probabilidade de a família escolhida ter mais do que três filhos?

Exercício 5. Em uma empresa multinacional trabalham 45 funcionários, dos quais 40 sabem falar inglês e 25 sabem falar inglês e espanhol. Escolhendo-se aleatoriamente um funcionário dessa empresa, a probabilidade de que ele fale inglês e não fale espanhol é
a) $2/3$ b) $1/2$ c) $2/5$ d) $1/3$ e) $1/5$

Exercício 6. A Confederação Brasileira de Futebol (CBF), em respeito ao Estatuto do Torcedor, realiza um sorteio para definir os árbitros das partidas de cada rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol. O quadro abaixo mostra a quantidade de árbitros por estado que entraram no sorteio para os jogos de uma determinada rodada do campeonato.

Estado	*SP*	*RJ*	*SC*	*PR*	*MG*	*GO*	*RS*	*DF*	*CE*	*PA*
Quantidade de árbitros	6	5	1	2	3	1	3	1	1	1

Para o jogo Flamengo(RJ) x Cruzeiro(MG), assinale a alternativa que apresenta a probabilidade de o árbitro sorteado ser um paulista.
a) $2,3\%$ b) $2,5\%$ c) 11% d) 23% e) 25%

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Uma classe tem 30 estudantes que receberam fichas numeradas de 1 a 30. Um dos alunos distraiu os amigos na hora de sorteio e pegou 5 fichas. Qual a probabilidade dele não ser sorteado?

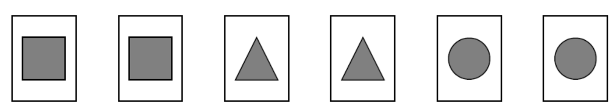
Exercício 8. Marcos e Paulo fazem parte de um grupo de 10 pessoas que serão dispostas aleatoriamente em fila. Qual a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Marcos e Paulo?

Exercício 9. Numa determinada empresa há 20 trabalhadores dos quais 8 são eventuais e 12 são efetivos. Deseja-se formar uma comissão de 2 trabalhadores para apresentar a empresa numa reunião sobre a concentração salarial. Qual a probabilidade de os dois trabalhadores escolhidos ao acaso serem efetivos?

Exercício 10. Em um jogo de tabuleiro para dois participantes, em cada rodada o atacante lança um dado e o defensor lança outro. O atacante vence se o número obtido no lançamento do seu dado for maior do que o número obtido no lançamento do dado do defensor. Caso contrário, vence o defensor. Os dados utilizados nesse jogo são dados convencionais, em formato cúbico, com suas faces numeradas de 1 a 6. Qual a probabilidade do atacante vencer uma rodada ?

Exercício 11. Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade dos números sorteados serem consecutivos?

Exercício 12. Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir.



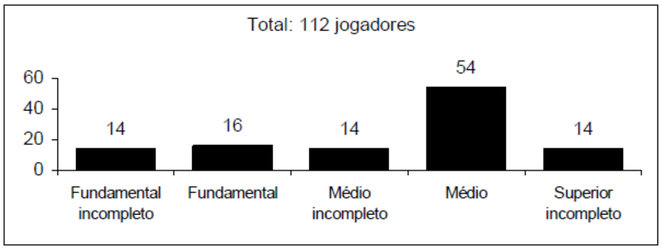
Inicialmente, o programa embaralha as cartas e apresenta-as viradas para baixo. Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par. A probabilidade de que o primeiro jogador forme um par em sua primeira tentativa é
a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/4$ d) $1/5$ e) $1/6$

Exercício 13. Um bispo, um padre e mais quatro fiéis estão em uma fila indiana. Supondo que o bispo e o padre não ficam juntos, qual a probabilidade de que as extremidades da fila sejam ocupadas por eles?

Exercício 14. Dois dados são jogados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma igual a 10 nas faces voltadas para cima?
a) $1/18$ b) $1/12$ c) $1/10$ d) $1/6$ e) $1/5$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

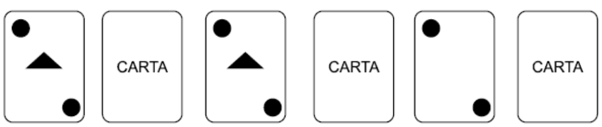
Exercício 15. A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro. De acordo com esses dados, se escolhermos ao acaso um dos jogadores pesquisados, qual a probabilidade (aproximadamente) dele ter concluído o Ensino Médio?



(*O Globo*, 24/7/2005.)

a) 14% b) 48% c) 54% d) 60% e) 68%

Exercício 16. Um jogo de seis cartas possui três pares de cartas idênticas. Sabe-se que as seis cartas, juntas, possuem 10 círculos, 6 triângulos e nenhuma outra marcação. Em certo momento do jogo, três das seis cartas estão viradas para cima, com as figuras visíveis, e três estão viradas para baixo, conforme ilustrado a seguir.



Virando para cima apenas duas das três cartas que estão voltadas para baixo, a probabilidade de que a última carta que restar virada para baixo tenha pelo menos dois círculos é igual a

a) 2/3 b) 2/9 c) 1/3 d) 5/6 e) 1/2

Exercício 17. Têm-se 3 urnas inicialmente vazias. Escolhe-se uma delas ao acaso com igual probabilidade (1/3 para cada). Em seguida, coloca-se uma bola dentro da urna escolhida. Repete-se o processo até que uma mesma urna tenha duas bolas. Qual a probabilidade de que quando o processo termine, a quantidade total de bolas dentro de todas as urnas seja igual a 2?

Exercício 18. Calcule a probabilidade de que um número escolhido aleatoriamente sendo este positivo e divisor de 10^{99} seja um número inteiro múltiplo de 10^{88}.

Exercício 19. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo baralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: "Que estranho, não tenho nenhuma carta de espadas." Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?

Exercício 20. Existem dois tipos de anos bissextos: aqueles que são múltiplos de 4, mas não são de 100 e aqueles que são múltiplos de 400. Por exemplo, serão anos bissextos 2024, 2052 e 2400; não serão anos bissextos 2038, 2075 e 2100. Baseado na convenção acima, se escolhermos aleatoriamente um ano entre 2014 e 2413 (incluindo esses dois anos), qual a probabilidade do ano ser bissexto?

Exercício 21. Uma urna contém cinco cartões, numerados de 1 a 5. Retira-se sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões da urna e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos. Qual é a probabilidade de esse número ser divisível por 4?

Respostas e Soluções.

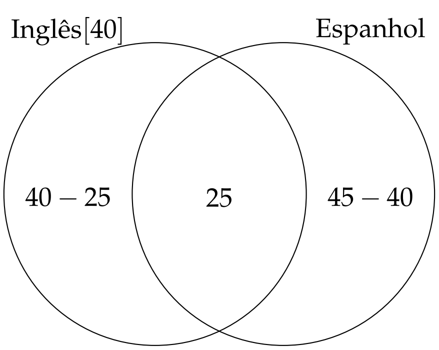
1. No conjunto listado no enunciado há 12 números pares, dentre os 23 elementos do universo. Sendo assim, a probabilidade procurada será igual a $\dfrac{12}{23}$.

2. (Extraído do vestibular da FGV $-$ 2014)
O universo é igual a 72 bolas, como a probabilidade de retirar uma de cor branca é $1/4$, podemos concluir que há $72 \cdot \dfrac{1}{4} = 18$ bolas brancas e a probabilidade de retirar uma vermelha é $1/3$, então há $72 \cdot \dfrac{1}{3} = 24$ bolas vermelhas. Sendo assim, há $72 - 18 - 24 = 30$ pretas e a diferença pedida é igual a $30 - 16 = 12$, o que está na letra **A**.

3. (Adaptado o exame da acesso de IFSP(SP) $-$ 2014)
Na caixa há $8 + 6 + 6 + 4 = 24$ balas, das quais 4 são de tangerina. Sendo assim, a probabilidade procurada é de $\dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$, o que está na letra **B**.

4. Sejam T, Q e C o conjuntos com as famílias com três, quatro e cinco filhos, respectivamente. Daí, temos $|U| = 100\%$ e $|U| = 20\% + 30\% + 35\% + |T| + |Q| + |C|$, com $|T| = |Q| = |C|$, ficando $|T| + |Q| + |C| = 15\%$ e $|T| = |Q| = |C| = 5\%$. Foi pedida a probabilidade de ter mais de três filhos, ou seja $P(Q \cup C) = 10\%$.

5. (Extraído do vestibular da FCI(SP) $-$ 2014)



São 15 funcionários que falam inglês e não falam espanhol, então a probabilidade será igual a $\dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$, o que está na letra **D**.

6. (Adaptado o exame da acesso de IFSP(SP) $-$ 2015)
São $6 + 5 + 1 + 2 + 3 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 = 24$ árbitros, então a probabilidade do sorteiro de um juiz paulista é de $\dfrac{6}{24}\dfrac{1}{4} = 25\%$. O que está na letra **E**.

7. Temos $|U| = 30$, sendo $|E|$ a quantidade de chances dele ser sorteado e $|\overline{E}|$ o complementar disso, teremos $|E| = 5$, $|\overline{E}| = 25$ e a probabilidade pedida sendo $P = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5}{6}$.

8. (Extraído da Videoaula)
Temos $|U| = 10!$ e E é uma permutação dos cinco locais nos quais haverá exatamente quatro pessoas entre Marcos e Paulo (1° na fila e 6° na fila, 2° e 7°, 3° e 8°, 4° e 9° e, por fim, 5° e 10°), vezes dois (Marcos antes de Paulo e *vice versa*), vezes 8! (permutação dos demais), portanto $|E| = 5 \cdot 2 \cdot 8!$. Logo, a probabilidade fica

$$P = \frac{5 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{5 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{9}.$$

9. São possíveis $|U| = C_2^{20} = \dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$ duplas entre todos os funcionários e $|E_f| = C_2^{12} = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ duplas com efetivos. Assim, a probabilidade fica $\dfrac{66}{190} = \dfrac{33}{95}$.

10. Temos que a probabilidade de ganhar varia de acordo com o dado do atacante. Observe os pares (x, y), onde x é o valor que o atacante obteve e y o valor que o defensor obteve. As vitórias do atacante são os pares do conjunto

$$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),\\ (5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\},$$

esse é um subconjunto do universo que tem $6 \times 6 = 36$ pares ordenados. Logo, a probabilidade fica igual a

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

11. (Extraído da Videoaula)
Temos que o $|U| = C_3^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$. Agora perceba que os consecutivos são as triplas ordenadas $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $\ldots$, $(n-2, n-1, n)$, e na primeira coordenada que cada tripla observamos uma variação de 1 até $(n-2)$, ou seja, $|E| = n - 2$ trios. E a probabilidade será

$$P = \frac{n-2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = \frac{6}{n(n-1)}$$

12. (Extraído do vestibular do IBMEC $-$ 2004)
O problema começará depois de observar a primeira carta virada e tentar procurar o respectivo par entre as cinco cartas restantes. A probabilidade disso é $\dfrac{1}{5}$, o que está na letra **D**.

13. O total de disposições da fila é igual a $(6! - 2 \cdot 5!)$, isto é, o total de casos menos os casos com os dois juntos. Os casos favoráveis, com eles nas pontas (Padre no início ou no final), correspondem a duas vezes a permutação dos quatro fiéis, ou seja $|E| = 2 \cdot 4!$. A probabilidade pedida fica igual a $\dfrac{2 \cdot 4!}{6! - 2 \cdot 5!} = 10\%$.

14. (Adaptado do vestibular da PUC(RS) − 2014)
Observe a tabela abaixo na qual os primeiros números de cada coluna e linha indicam o resultado do lançamento dos dados e os resultados subsequentes são as somas dos primeiros números de cada coluna e linha. Perceba que são 36 resultados no lançamento de dois dados.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Há 3 resultados favoráveis, então a probabilidade será de $\dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$, o que está na letra **B**.

15. (Adaptado do ENEM)
Se o jogador está no ensino superior, então concluiu o Ensino Médio. O número de jogadores nessa condição é igual a $54 + 14 = 68$. A quantidade de jogadores pesquisados foi $3 \cdot 14 + 16 + 54 = 112$. Logo, o percentual pedido é $68/112 \cong 0,60 = 60\%$. O que está na letra **D**.

16. (Extraído do vestibular da FAMERP(SP) − 2015)
Das três cartas idênticas (pares de cartas), já temos um par exposto e uma carta definida, portanto falta outra sem triângulos e com dois círculos. Os 4 triângulos e os dois círculos faltantes serão divididos em duas cartas iguais, ficando cada uma com 2 triângulos e um círculo. Logo, resta uma carta apenas com a condição solicitada no problema e a probabilidade dela ficar virada para baixo é igual a $\dfrac{1}{3}$, o que está na letra **C**.

17. (Extraído do BQ da OBMEP − 2014)
Primeiro, uma bola é colocada em alguma urna. Para que o processo termine com duas bolas, é necessário que, no próximo passo, a próxima bola seja colocada na mesma urna onde a primeira bola foi colocada. Isso tem probabilidade de 1/3. Logo, a probabilidade de que o processo termine com duas bolas é igual a 1/3.

18. (Extraído do IMO Training)
A probabilidade pedida é $P = \frac{\{multiplos(10^{88})<10^{99}\}}{\{divisores(10^{99})\}}$.
Observe que $10^{99} = 2^{99} \cdot 5^{99}$, portanto o número de divisores dele é igual a

$$N_{divisores} = (99+1)(99+1) = 10^4.$$

Precisamos agora determinar o número de múltiplos de 10^{88}. Como

$$10^{99} = 10^{88} + (n-1)10^{88} \therefore n = 10^{11}.$$

Agora, como $10^{11} = 5^{11} \times 2^{11}$, concluímos que ele tem $(11+1)(11+1) = 144$ divisores. Por fim chegamos a

$$P = \frac{144}{10^4} = \frac{9}{625}.$$

19. (Extraída da OBM)
Os casos possíveis são todos os casos de escolhermos 13 lugares dentre os 39 possíveis para colocarmos as 13 cartas de espadas:

$$|\text{Casos Possíveis}| = C_{39}^{13}.$$

Os casos favoráveis ocorrerão quando não tiver nenhuma carta de espadas com o jogador B, ou seja, quando todas as 13 cartas de espadas estiverem distribuídas entre as 26 cartas dos jogadores C e D:

$$|\text{Casos Favoráveis}| = C_{26}^{13}.$$

Portanto, a probabilidade será:

$$P = \frac{C_{26}^{13}}{C_{39}^{13}} = \frac{\frac{26!}{13!13!}}{\frac{39!}{13!26!}} = \frac{26!26!}{13!39!}$$

20. (Extraído do material do PROFMAT − 2015)
De 2014 a 2413 temos um total de 400 anos. Neste intervalo temos anos bissextos de 4 em 4 anos, exceto nos anos de 2100, 2200 e 2300. Logo temos 97 anos bissextos. Portanto a probabilidade de um ano ser bissexto, entre 2014 a 2413, é igual a $\dfrac{97}{400}$.

21. (Extraído do material do PROFMAT − 2014)
O total de números distintos que podem ser formados é $5! = 120$. Para que um número seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Assim, com os algarismos de 1 a 5, temos 12, 24, 32, 52 que são divisíveis por 4. Fixados os dois últimos algarismos, temos 3! números distintos. Assim, a probabilidade solicitada é $\dfrac{4 \cdot 3!}{5!} = \dfrac{1}{5}$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com