Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Expressões Numéricas

Oitavo Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Se $a = 2$ e $b = 3$, calcule o valor das expressões:*

a) $\dfrac{a^3 b}{b^2}$.

b) a^b.

c) $a^3 b^2$.

d) $(ab^2)^2$.

e) $(b+a)^2 - a^2$.

Exercício 2. *Simplifique as expressões envolvendo radicais:*

a) $\sqrt[3]{x^4}$.

b) $(\sqrt[3]{8})^2$.

c) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$.

d) $\sqrt{32} + \sqrt{162}$.

e) $(4a^6b^4)^{3/2}$.

Exercício 3. *Transforme a expressão dada em outra sem radicais no denominador como indica o exemplo:*

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}.$$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

c) $\sqrt[9]{\dfrac{1}{a^2}}$.

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. *Elimine os expoentes negativos das expressões abaixo:*

a) $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^5y^{-3}}$.

b) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$.

c) $\left(\dfrac{ba^{-4}}{ab^{-3}}\right)^{-2}$.

d) $\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}} \cdot \dfrac{a^{-5}}{b^{-3}}$.

Exercício 5. *Simplificando a expressão* $\dfrac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}}$, *obtemos:*

a) $-\dfrac{6}{7}$.

b) $-\dfrac{7}{6}$.

c) $\dfrac{6}{7}$.

d) $\dfrac{7}{6}$.

e) $-\dfrac{5}{7}$.

Exercício 6. *Simplifique a expressão:*

$$\frac{\left(\dfrac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\dfrac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3}$$

Exercício 7. *Simplifique as expressões:*

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64x^{24}}}$.

b) $\sqrt[4]{x^4y^8z^2}$.

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. *Determine o valor da expressão abaixo quando $a = 2014$ e $n = 1000$.*

$$\frac{1}{a^{-n}+1} + \frac{1}{a^{-n+1}+1} + \ldots + \frac{1}{a^{-1}+1} + \frac{1}{a^0+1} + \frac{1}{a^n+1} + \frac{1}{1+a^{-n+1}} + \ldots + \frac{1}{a^1+1}.$$

(a) 1000^{2013} *(b)* 2013^{1000} *(c)* 2013 *(d)* $\dfrac{2001}{2}$ *(e)* 1000.

Exercício 9. *Definamos a operação $a \otimes b$ como sendo a^b. Por exemplo, $2 \otimes 3 = 8$. Determine o valor de:*

$$\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2}.$$

(a) $\dfrac{1}{256}$ *(b)* $\dfrac{1}{4}$ *(c)* 1 *(d)* 4 *(e)* 256.

Exercício 10. *As potências* 2^n *e* 5^n*, onde* n *é um inteiro positivo, começam com o mesmo algarismo* d*. Qual é este algarismo?*

Exercício 11. *Ao efetuar a soma* $13^1 + 13^2 + 13^3 + \ldots + 13^{2006} + 13^{2007}$*, obtemos um número inteiro. Qual o algarismo das unidades desse número?*
(a) 1 *(b)* 3 *(c)* 5 *(d)* 7 *(e)* 9.

Exercício 12. *Efetuando as operações indicadas na expressão*

$$\left(\frac{2^{2007} + 2^{2005}}{2^{2006} + 2^{2004}}\right) \cdot 2006$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?
(a) 4 *(b)* 5 *(c)* 6 *(d)* 7 *(e)* 8.

Exercício 13. *Sejam* a*,* b *e* c *inteiros e positivos. Entre as opções abaixo, a expressão que não pode representar o número 24 é:*
(a) ab^3 *(b)* a^2b^3 *(c)* a^cb^c
(d) ab^2c^3 *(e)* $a^bb^cc^a$.

Exercício 14. *O valor da expressão*

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0,666\ldots)} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{(1,333\ldots)}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

é igual a:
(a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ *(b)* $\sqrt{\frac{2}{5}}$ *(c)* $\sqrt{\frac{5}{2}}$
(d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ *(e)* $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Exercício 15. *Calcule o valor de*

$$A = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2000}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1999}$$

(a) 2^{1000} *(b)* 2^{999} *(c)* 1000
(d) 999 *(e)* 2.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $\frac{8}{3}$.

b) 8.

c) 72.

d) 324.

e) $5^2 - 2^2 = 21$.

2.

a) $x\sqrt[3]{x}$.

b) 4.

c) $3x^2y$.

d) $2\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$.

e) $(4a^6b^4)^{3/2} = \sqrt{2^6a^{18}b^{12}} = 8a^9b^6$.

3.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{x}$.

c) $\frac{\sqrt[9]{a^7}}{a}$.

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$.

e) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$.

2 Exercícios de Fixação

4.

a) $\frac{y^7}{x^8}$.

b) $\frac{3s^3}{t^6}$.

c) $\frac{a^{10}}{b^8}$.

d) $\frac{b^5}{a^8}$.

5.

$$\begin{aligned}
\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{9} - \frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{-7/6} \\
&= -\frac{6}{7}.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3} &= \frac{\frac{9x^4y^2}{a^6b^6}}{\frac{27x^3y^6}{8a^6b^6}} \\
&= \frac{8x}{3y^4}.
\end{aligned}$$

7.

a) 2^2x^4.

b) $xy^2z^{1/2}$

c) $x^{1/8}$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

8. *Veja que:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+a^{-k}} + \frac{1}{1+a^k} &= \frac{1}{1+1/a^k} + \frac{1}{1+a^k} \\
&= \frac{a^k}{1+a^k} + \frac{1}{1+a^k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, se agruparmos a primeira fração com a última, a segunda com a penúltima e assim sucessivamente; sempre obteremos o número 1. A única fração que não fará parte de nenhum par é a do meio que vale $\frac{1}{1+a^0} = \frac{1}{2}$. *Como a quantidade de pares é igual a n, a resposta é* $1000 + \frac{1}{2} = \frac{2001}{2}$. *Resposta D.*

9.

$$\begin{aligned}
\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2} &= \frac{2 \otimes (2 \otimes 4)}{(4 \otimes 2) \otimes 2} \\
&= \frac{2 \otimes 16}{16 \otimes 2} \\
&= \frac{2^{16}}{16^2} \\
&= 2^8.
\end{aligned}$$

Resposta E.

10. *Representemos os dígitos desconhecidos de 2^n e 5^n com asteriscos. Se k e l são as quantidades de algarismos de cada um deles, temos:*

$$\begin{aligned} d \cdot 10^k < d***\ldots* &= 2^n < (d+1)\cdot 10^k \\ d \cdot 10^l < d***\ldots* &= 5^n < (d+1)\cdot 10^l \end{aligned}$$

Multiplicando ambas as inequações, obtemos $10^{k+l} \cdot d^2 < 10^n < 10^{k+l} \cdot (d+1)^2$. Cancelando 10^{k+l} em ambos os lados, concluímos que existe uma potência de 10 entre d^2 e $(d+1)^2$. Analisando os quadrados dos dígitos de 1 até 9, percebemos que isso ocorre apenas para $d = 3(\ 3^2 < 10 < 4^2)$.

11. *Indiquemos com uma seta o último dígito de um número. Assim,*

$$\begin{array}{llll} 13^1 \to 3 & 13^2 \to 9 & 13^3 \to 7 & 13^4 \to 1 \\ 13^5 \to 3 & 13^6 \to 9 & 13^7 \to 7 & 13^8 \to 1 \\ \ldots & & & \end{array}$$

Como 13^4 termina em 1, sempre que multiplicarmos os números de uma linha por esse valor para obtermos os números da próxima, o último dígito se manterá. Podemos então agrupar os número de 4 em 4 e obtermos uma soma que termina em $3+9+7+1 \to 0$. Como $2007 = 501\cdot 4+3$, teremos 501 grupos e sobrarão números com os dígitos 3, 9 e 7 cuja soma terminará em 9. Resposta E.

12.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\cdot 2006 &= \frac{2^{2005}(2^2+1)}{2^{2004}(2^2+1)}\cdot 2006 \\ &= 2\cdot 2006 \\ &= 4012. \end{aligned}$$

A soma dos dígitos de 4012 é 7. Resposta D.

13. *O número $24 = 2^3 \cdot 3$ tem somente dois divisores cubos perfeitos: 1 e 8. Assim, se é possível representar 24 na forma a^2b^3, então $b = 1$ ou $b = 2$ e, portanto, $a^2 = 24$ ou $a^2 = 3$, o que é impossível. Além disso, na alternativa a podemos tomar $a = 3$ e $b = 2$; na alternativa c, podemos tomar $a = 24$ e $b = c = 1$; na alternativa d, podemos tomar $a = 3$, $b = 1$ e $c = 2$; e na alternativa e, podemos tomar $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$. Resposta B.*

14. *Veja que*

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot(0,666\ldots)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{6}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6^2\cdot 9}} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{1,333\ldots}} &= \sqrt{1-\frac{1}{12/9}} \\ &= \sqrt{1-\frac{9}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{12}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão procurada é:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\right]^{-1/2} &= \left[\frac{10}{18}\right]^{-1/2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Resposta E

15. *Seja*

$$\begin{aligned} B &= \frac{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000}{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000} \\ &= \frac{2^{1000}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1000}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2000} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \frac{2^{1000}\cdot 2000!}{2000!} \\ &= 2^{1000} \end{aligned}$$

Como, $B = 1$, concluímos que $A = 2^{1000}$. Resposta C.

Observação: *Estamos escrevendo 2000! no lugar de*

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2000.$$