Números Complexos – Forma Geométrica

Radiciação de números complexos no plano de Argand–Gauss

Material elaborado por Letícia Mattos.

Números Complexos – Forma Geométrica
Radiciação de números complexos no plano de Argand–Gauss

1 Exercícios Introdutórios

Antes de tudo, vamos relembrar a *Fórmula de De Moivre*:

$$(\cos x + i\,sen\,x)^n = \cos(nx) + i\,sen(nx),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.
Ao longo dessa lista, também admitir a fórmula de Euler

$$e^{xi} = \cos x + i\,sen\,x.$$

Exercício 1. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Prove que

$$(\cos\theta + i\,sen\,\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta}{n}\right).$$

Exercício 2. Encontre as soluções para as seguintes equações:

(a) $z^3 = i$

(b) $z^4 = -16$

(c) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

Exercício 3. A equação

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

tem exatamente uma solução complexa w tal que, no plano de Argand–Gauss, $180° < \arg w < 270°$. Encontre w.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. (a) Encontre os valores de x para os quais

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = sen\,x + sen\,2x + sen\,3x$$

(b) Generalise o item (a). Isto é, encontre os valores de x para os quais

$$\cos x + \cdots + \cos nx = sen\,x + \cdots + sen\,nx,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 5. Se $n \in \mathbb{N}$ e $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ são tais que $w_1^n = w_2^n = 1$ e $1 + w_1 + w_2 = 0$, prove que n é múltiplo de 3.

Exercício 6. Se $n \in \mathbb{N}$ e $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ são tais que $z_1^n = z_2^n = z_3^n = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, prove que n é múltiplo de 3.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Determine quantos números naturais $n \geq 2$ satisfazem a afirmação a seguir:
Se $z_1, \cdots, z_n$ são números complexos distintos tais que

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1 \quad \text{e} \quad z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0,$$

então eles estão igualmente espaçados na circunferência unitária.

Exercício 8. Seja z um número complexo tal que

$$iz^2 = \overline{z^2} + z.$$

Encontre o argumento de z.

Exercício 9. Seja P um polinômio de grau $< p$, com p primo e coeficientes complexos. Sejam $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ as p-ésimas raízes da unidade. Prove que

$$\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{p} P(\omega_s) = P(0).$$

Respostas e Soluções.

1. Pela fórmula de Euler, temos

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\,sen\,\theta)^{1/n} &= (e^{\theta i})^{1/n}\\ &= e^{\theta i/n}\\ &= \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta}{n}\right).\end{aligned}$$

2.

(a) Primeiro note que, para que z satisfaça a equação $z^3 = i$, a norma de z deve ser igual a 1. Disso concluímos que podemos escrever z como $z = \cos\theta + i\,sen\,\theta$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2) + i\,sen(\pi/2) &= (\cos\theta + i\,sen\,\theta)^3\\ &= \cos 3\theta + i\,sen\,3\theta.\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $3\theta = \pi/2 + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, segue que as soluções da equação são

$$\cos(\pi/6) + i\,sen(\pi/6),$$
$$\cos(5\pi/6) + i\,sen(5\pi/6),$$
e
$$\cos(3\pi/2) + i\,sen(3\pi/2).$$

(b) Para que z satisfaça a equação $z^4 = -16$, a norma de z deve ser igual a 2. Disso concluímos que podemos escrever z como $z = 2(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}16\cdot(\cos\pi + i\,sen\,\pi) &= 16(\cos\theta + i\,sen\,\theta)^4\\ &= 16\cdot(\cos 4\theta + i\,sen\,4\theta).\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $4\theta = \pi + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, segue que as soluções da equação são

$$2(\cos(\pi/4) + i\,sen(\pi/4)),$$
$$2(\cos(3\pi/4) + i\,sen(3\pi/4)),$$
$$2(\cos(5\pi/4) + i\,sen(5\pi/4)),$$
e
$$2(\cos(7\pi/4) + i\,sen(7\pi/4)).$$

(c) Seja $x = z^3$. Então a equação pode ser escrita como

$$x^2 + 7x - 8 = 0 \iff (x-1)(x+8) = 0.$$

Assim, devemos ter ou $z^3 = 1$ ou $z^3 = -8$.

Primeiro, vamos encontrar os valores de z tais que $z^3 = 1$:

Como a norma de z é igual a 1 nesse caso, podemos escrever z como $z = \cos\theta + i\,sen\,\theta$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\cos 0 + i\,sen\,0 &= (\cos\theta + i\,sen\,\theta)^3\\ &= \cos 3\theta + i\,sen\,3\theta.\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $3\theta = 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, segue que as soluções da equação quando $z^3 = 1$ são

$$1$$
$$\cos(2\pi/3) + i\,sen(2\pi/3),$$
e
$$\cos(4\pi/3) + i\,sen(4\pi/3).$$

Agora, falta encontrar os valores de z tais que $z^3 = -8$:

Como a norma de z é igual a 2 nesse caso, podemos escrever z como $z = 2(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}8(\cos\pi + i\,sen\,\pi) &= 8(\cos\theta + i\,sen\,\theta)^3\\ &= 8(\cos 3\theta + i\,sen\,3\theta).\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $3\theta = \pi + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, segue que as soluções da equação quando $z^3 = -8$ são

$$-2$$
$$2(\cos(\pi/3) + i\,sen(\pi/3)),$$
e
$$2(\cos(5\pi/3) + i\,sen(5\pi/3)).$$

3. Como $z \neq 1$, a equação em questão é equivalente a

$$(z-1)\cdot(1 + z + \cdots + z^5) = 0 \iff z^6 - 1 = 0.$$

Para que z satisfaça a equação $z^6 = 1$, a norma de z deve ser igual a 1. Disso concluímos que podemos escrever z como $z = \cos\theta + i\,sen\,\theta$. Assim, temos

$$\cos 6\theta + i\,sen\,6\theta = \cos 0 + i\,sen\,0.$$

Como θ deve assumir valores da forma $2\pi n/6$, para $n \in \mathbb{Z}$, concluímos que o único valor de z tal que $180^\circ < \arg z < 270^\circ$ é

$$z = \cos 240^\circ + i\,sen\,240^\circ.$$

4.

(a) Observe que $\cos x = (e^{xi} + e^{-xi})/2$ e $sen\,x = (e^{xi} - e^{-xi})/2$. Substituindo essa expressões na nossa equação, ficamos com

$$e^{xi}+e^{-xi}+e^{2xi}+e^{-2xi}+e^{3xi}+e^{-3xi} = e^{xi}-e^{-xi}+e^{2xi}-e^{-2xi}+e^{3xi}-e^{-3xi},$$

o que implica em

$$e^{-xi} + e^{-2xi} + e^{-3xi} = 0.$$

Seja $z = e^{-xi}$. Observe que $z \notin \{0, 1\}$. Logo, temos

$$\begin{aligned}z + z^2 + z^3 = 0 &\iff z(1 + z + z^2) = 0\\ &\iff (z-1)(1 + z + z^2) = 0\\ &\iff z^3 = 1.\end{aligned}$$

Como as soluções da última equação são dadas pelas raízes cúbicas da unidade, segue que as soluções da nossa equação inicial são dadas pelos ângulos correspondentes a essas raízes. Portanto, segue que as soluções formam o conjunto

$$S = \left\{\frac{2\pi n}{3} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(b) Substituindo as expressões $\cos x = (e^{xi} + e^{-xi})/2$ e $sen\, x = (e^{xi} - e^{-xi})/2$ na nossa equação, ficamos com

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{kxi} + e^{-kxi}) = \sum_{k=1}^{n} (e^{kxi} - e^{-kxi}),$$

o que implica em

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-kxi} = 0.$$

Seja $z = e^{-xi}$. Observe que $z \notin \{0, 1\}$. Logo, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} z^k = 0 &\iff z \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \\ &\iff (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \\ &\iff z^n = 1. \end{aligned}$$

Como as soluções da última equação são dadas pelas raízes n-ésimas da unidade, segue que as soluções da nossa equação inicial são dadas pelos ângulos correspondentes a essas raízes. Portanto, segue que as soluções formam o conjunto

$$S = \left\{ \frac{2\pi k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5. Das igualdades $w_1^n = w_2^n = 1$ podemos inferir que w_1 e w_2 têm norma 1. Assim, podemos escrever

$$w_1 = \cos\theta_1 + i\, sen\, \theta_1$$
e
$$w_1 = \cos\theta_2 + i\, sen\, \theta_2,$$

onde $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$. Da equação $1 + w_1 + w_2 = 0$, inferimos que

$$\begin{cases} 1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 0 \\ sen\, \theta_1 + sen\, \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação inferimos que $\theta_1 = -\theta_2$. Substituindo essa expressão na primeira equação, ficamos com $\cos\theta_1 = -1/2$. Portanto, temos $\theta_1 = -\theta_2 = 2\pi/3$. Segue que

$$w_1^n = \cos 2\pi n/3 + i\, sen\, 2\pi n/3$$
e
$$w_1^n = \cos(-2\pi n/3) + i\, sen(-2\pi n/3).$$

Logo, $w_1^n = w_2^n = 1$ se e somente se 3 divide n.

6.

Das igualdades $z_1^n = z_2^n = z_3^n = 1$ podemos inferir que z_1, z_2 e z_3 têm norma 1. Multiplicando ambos os lados da equação $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ por z_3^{-1}, ficamos com $z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} + 1 = 0$. Denotando $w_1 = z_1 z_3^{-1}$ e $w_2 = z_2 z_3^{-1}$, note que $w_1^n = w_2^n = 1$ e $w_1 + w_2 + 1 = 0$. Ou seja, estamos exatamente no cenário do último exercício! Disso segue que n é múltiplo de 3.

7. Vamos analisar o problema geometricamente. Primeiro, suponha que $n \geq 3$. Sem perda de generalidade, suponha que $\arg z_k \in [0, 2\pi]$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e que

$$\arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n.$$

Agora, considere os vetores $\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2 - z_1}, \ldots, \overrightarrow{z_n - z_{n-1}}, \overrightarrow{z_1 - z_n}$. As condições do problema são equivalentes a esses vetores gerarem um polígono de n lados, cada um de medida 1.

Agora, observe que, para que os complexos $z_1, \cdots, z_n$ estejam igualmente espaçados na circunferência, devemos ter

$$\arg z_2 - \arg z_1 = \arg z_3 - \arg z_2 = \cdots = \arg z_n - \arg z_{n-1} = \arg z_1 - \arg z_n.$$

Note que isso acontece se e só se os vetores $\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{z_2 - z_1}, \ldots, \overrightarrow{z_n - z_{n-1}}, \overrightarrow{z_1 - z_n}$ geram um polígono regular onde cada lado tem medida 1 e todos os ângulos são iguais. Então a nossa pergunta pode ser reformulada da seguinte maneira:

Para quais valores de n todo polígono de n lados, todos de medida 1, é um polígono regular?

Ora, para todo $n \geq 4$ podemos encontrar polígonos de n lados iguais que não são regulares! (você pode, por exemplo, 'grudar' alguns triângulos equiláteros para formar um polígono de n lados que não será regular).

Para $n = 3$, se todos os lados têm medidas iguais, então o polígono é de fato regular (é um triângulo equilátero!).

Finalmente, para $n = 2$ a análise deve ser diferente, pois não temos mais um polígono. Nesse caso, temos

$$|z_1| = |z_2| = 1 \qquad \text{e} \qquad z_1 = -z_2.$$

Como z_1 e z_2 são diametralmente opostos, concluímos que eles estão igualmente espaçados na circunferência unitária. Portanto, apenas dois valores de n satisfazem a nossa afirmação inicial. Esses valores são 2 e 3.

8. Seja z um número complexo tal que

$$iz^2 = \overline{z^2} + z.$$

Encontre o argumento de z.

Seja $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Substituindo essa expressão na nossa equação, ficamos com

$$-2ab + (a^2 - b^2)i = (a^2 - b^2 + a) + (b - 2ab)i.$$

Igualando as partes real e imaginária dos dois lados da equação, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -a - 2ab \\ a^2 - b^2 = b - 2ab. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -b$ e $2a^2 - a = 0$, o que implica em $a = 0$ or $a = 1/2$. Se $a = 0$, então $z = 0$ e o argumento de z é indefinido. Se $a = 1/2$, então $z = 1/2 - i/2$. Agora, note que

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\, sen\, \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\, sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

Portanto, o argumento de z é igual a $-\pi/4$.

9.
Seja $P = \sum_{r=0}^{n} a_r z^r$, em que $n < p$. Então, temos

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{p} P(\omega_s) &= \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=0}^{n} a_r \omega_s^r \\ &= \sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{s=1}^{p} a_r \omega_s^r\right) \\ &= \sum_{r=0}^{n} a_r \left(\sum_{s=1}^{p} \omega_s^r\right)\end{aligned}$$

Agora, afirmamos que, para todo r tal que $0 < r \leq n$, $\sum_{s=1}^{p} \omega_s^r$ é igual a soma de todas as p-ésimas raízes da unidade. De fato, cada p-ésima raíz da unidade pode ser escrita na forma $\omega_s = e^{\frac{2\pi si}{p}}$. Como p é primo, em particular r é coprimo com p para todo r tal que $0 < r \leq n$ (pois $n < p$). Dessa forma $\omega_1^r, \omega_2^r, \ldots, \omega_p^r$ é nada mais que uma permutação dessas raízes da unidade. Assim, ficamos com

$$\sum_{s=1}^{p} P(\omega_s) = \sum_{r=1}^{n} a_r \left(\sum_{s=1}^{p} \omega_s\right) + a_0 p$$

Agora, veja que a soma de todas as p-ésimas raízes da unidade é igual a zero. De fato, denotando $z = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{p} \omega_s &= \sum_{s=1}^{p} e^{\frac{2\pi si}{p}} \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} z^s \\ &= \frac{z^p - 1}{z - 1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\sum_{s=1}^{p} P(\omega_s) = a_0 p = P(0)p,$$

como queríamos.

Material elaborado por Letícia Mattos.