Módulo de Progressões Aritméticas

Exercícios de PA

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Progressões Aritméticas
Exercícios de PA

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Analise as sequências abaixo e determine quais delas são progressões aritméticas, justificando cada caso.

a) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$

b) $(8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, \ldots)$

c) $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$

d) $(-5, -6, -7, -8, -9, \ldots)$

e) $(10, 13, 17, 22, \ldots)$

Exercício 2. Escreva os cinco primeiros termos das seguintes progressões aritméticas:

a) P.A. de primeiro termo igual a 4 e razão 3;

b) P.A. de primeiro termo igual a 20 e razão -4;

c) P.A. de primeiro termo igual a 1 e razão $\frac{1}{2}$.

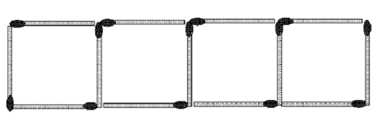
Exercício 3. Dada a P.A. de termo geral $a_n = 5 + 2n$, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Calcule:

a) o primeiro termo dessa P.A.;

b) o décimo termo dessa P.A.;

c) a razão dessa P.A..

Exercício 4. Joãozinho brinca de formar quadrados com palitos de fósforo como na figura a seguir.



Qual a quantidade de palitos necessária para fazer 100 quadrados em fila?

Exercício 5. Determine a soma de todos os 50 primeiros números naturais pares positivos.

Exercício 6. Numa olimpíada, foram colocados numa pista retilínea 30 tochas acesas, distando 3 metros uma da outra e um recipiente contendo água a 1 metro antes da primeira tocha. Um corredor deveria partir do local onde está o recipiente, pegar a 1^a tocha, retornar ao ponto de partida para apagá-la e repetir esse movimento até pegar a 30^a tocha. Calcule qual a quantidade total de metros percorridos para:

a) apagar a primeira tocha?

b) apagar a segunda tocha?

c) apagar a terceira tocha?

d) apagar a todas as tochas?

2 Exercícios de Fixação

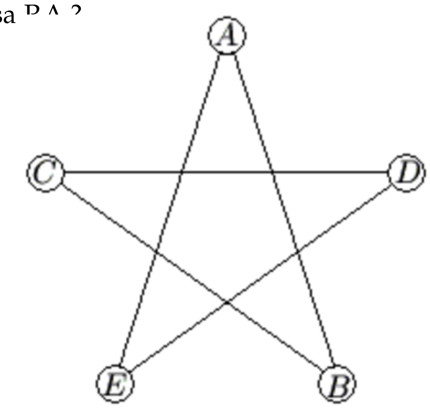
Exercício 7. A soma do quarto e oitavo termos de uma P.A. é 20, e o trigésimo primeiro termo é o dobro do décimo sexto termo. Qual o quinto termo dessa P.A.?

Exercício 8. Calcule a soma dos sessenta primeiros termos da P.A. $(2, 5, 8, \ldots)$

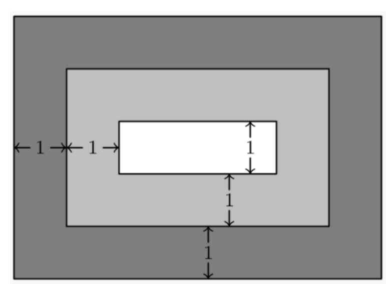
Exercício 9. O sétimo termo de uma P.A. é igual a 8 e o décimo termo é igual a 2. Qual a soma dos 10 primeiros termos dessa P.A.?

Exercício 10. A soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 4n^2 - 2n$, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Qual o décimo termo dessa progressão?

Exercício 11. Na estrela abaixo, as letras A, B, C, D e E serão trocadas pelos números 3, 5, 6, 7 e 9, não necessariamente nessa ordem. As somas dos números nos extremos dos segmentos AB, BC, CD, DE e EA formam uma P.A., outra vez, não necessariamente nessa ordem. Qual o termo médio dessa P.A.?



Exercício 12. Um tapete foi confeccionado de acordo com a figura abaixo. As três áreas de cores diferentes está em P.A.. O retângulo interno tem 1 metro de largura e cada uma das duas regiões sombreadas tem 1 metro de largura em todos os quatro lados. Qual é o comprimento em metros do retângulo interior?



Exercício 13. Na sequencia definida por $a_n = \frac{5n-1}{2}$, qual a soma dos 11 primeiros termos?

Exercício 14. Um atleta corre sempre 400 metros a mais que no dia anterior. Ao final de 11 dias ele percorre um total de 35200 metros. Qual o número de metros que ele correu no último dia?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Sejam as sequências $(75, a_2, a_3, \ldots)$ e $(25, b_2, b_3, \ldots)$ duas progressões aritméticas de mesma razão. Se $a_{100} + b_{100} = 496$, então qual o valor de $\dfrac{a_{100}}{b_{100}}$?

Exercício 16. Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada pela fórmula $S_n = n^2 - 6n$, então qual o valor do décimo quinto termo dessa progressão?

Exercício 17. A soma dos n termos de uma P.A. vale 715. Agora, o primeiro termo foi acrescido de 1 unidade, o segundo teve acréscimo de 3, o terceiro foi somado com 5 e, de modo geral, o termo da posição k foi somado com o k-ésimo número ímpar positivo. A nova sequência tem soma igual a 836. Qual o valor da soma do primeiro, com o último, com o termo médio da sequência inicial

Exercício 18. A tabela abaixo mostra que, em certa cidade, nos últimos meses, o número de assaltos vem crescendo em Progressão Aritmética. Se o crescimento continuar nessa progressão e as autoridades não tomarem providências a respeito, qual será o número de assaltos nessa cidade no mês de dezembro desse ano?

MÊS	Número de assaltos
Março	18
Abril	31
Maio	44

Exercício 19. Uma *progressão aritmética*, costumeiramente chamada de $P.A.$, é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado de diferença comum ou razão da progressão. Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19,$$
$$a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \ldots$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i.

a) Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?

b) A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &= 207 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= 553. \end{aligned}$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

Exercício 20. O pagamento de um certo pintor aumenta de acordo com o dias em que ele trabalha. No primeiro dia, ele recebeu 1 real. No segundo dia, ele recebeu o que tinha ganho no primeiro dia mais 2 reais. No terceiro dia, ele recebeu o que tinha recebido no segundo dia mais 3 reais. Desse modo, continuando o processo, quanto o pintor irá receber no centésimo dia?

Exercício 21. Prove que as potências de 2 são os únicos inteiros positivos que não podem ser escritos como soma de dois ou mais inteiros consecutivos positivos.

Respostas e Soluções.

1. Para ser P.A. a diferença entre termos sucessivos precisa ser constante (chamada de diferença comum ou razão) e isso só ocorre nas letras b (cuja diferença constante é igual a 7) e d (com diferença igual a -1).

2. Basta aplicarmos a definição de P.A. em cada item.

a) $(4, 7, 10, 13, 16)$.

b) $(20, 16, 12, 8, 4)$.

c) $(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3)$.

3. Para calcularmos qualquer termo na fórmula geral, basta substituirmos o n pelo valor da posição desejada.

a) Sendo $n = 1$ temos $a_1 = 5 + 2 \cdot 1 = 7$.

b) Sendo $n = 10$ temos $a_{10} = 5 + 2 \cdot 10 = 25$.

c) Sendo $n = 2$ temos $a_2 = 5 + 2 \cdot 2 = 9$. Agora, fazendo a razão ou diferença comum temos $d = a_2 - a_1$ e $d = 2$.

4. Observe que temos a sequência

$$(4, 7, 10, 13, \ldots)$$

na qual cada termo a_n representa a quantidade de palitos necessária para forma a quantidade n de quadrados, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Observe que a cada novo quadrado na fila, precisamos acrescentar 3 palitos. Assim, a fórmula geral fica $a_n = 1 + 3n$ e

$$a_{100} = 1 + 3 \cdot 100 = 301.$$

5. O primeiro será o 2, a diferença comum valerá 2 e o

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_1 + 49d \\ a_{50} &= 2 + 49 \cdot 2 = 100. \end{aligned}$$

Sendo assim, a soma

$$S_{50} = \frac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 102 \cdot 25 = 2550.$$

6. Temos que para a apagar a primeira tocha o corredor deve percorrer 1 metro para pegar a 1^a tocha e 1 metro retornando para apagá-la.

a) Sendo assim, temos que $a_1 = 2$.

b) Para a 2^a tocha, ficamos com

$$a_2 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

c) Para a 3^a tocha, ficamos com

$$a_3 = 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 14.$$

d) Agora, como a cada nova tocha o corredor precisa ir e voltar um novo trecho de 3 m, fica claro que $d = 6$ e vamos calcular

$$\begin{aligned} S_{30} &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{30} \\ &= \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \\ &= (a_1 + a_1 + 29d) \cdot 15 \\ &= (2 + 2 + 29 \cdot 6) \cdot 15 = 2670. \end{aligned}$$

7. Do enunciado, podemos escrever

$$\begin{cases} a_4 + a_8 = 20 \\ a_{31} = 2 \cdot a_{16} \end{cases} \implies \begin{cases} 2a_1 + 10d = 20 \\ a_1 + 30d = 2 \cdot a_1 + 30d \end{cases}$$

O que conclui $a_1 = 0$ e $d = 2$, gerando $a_5 = 8$.

8. Temos que $a_1 = 2$ e $d = 3$. Assim,

$$\begin{aligned} a_{60} &= a_1 + 59d \\ a_{60} &= 2 + 59 \cdot 3 = 179. \end{aligned}$$

Por fim, o valor pedido fica

$$\begin{aligned} S_{60} &= \frac{(2 + 179) \cdot 60}{2} \\ S_{60} &= 181 \cdot 30 = 5430. \end{aligned}$$

9. Do enunciado temos $a_7 = 8$ e $a_{10} = 2$. Sendo assim, como $a_{10} = a_7 + 3d$ ficamos com $d = -2$. A partir disso, calculamos $a_7 = a_1 + 6d$ encontrando $a_1 = 20$ e

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \\ &= (20 + 2) \cdot 5 = 110. \end{aligned}$$

10. Da teoria temos que

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$$

e

$$S_9 = a_1 + a_2 + \ldots + a_9$$

e daí

$$S_{10} - S_9 = a_{10}.$$

Usando a regra do enunciado temos que

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= 4 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 - (4 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9) \\ &= 400 - 20 - (324 - 18) \\ &= 380 - 306 = 74. \end{aligned}$$

11. (Adaptado do AMC)
Observe que cada vértice estará em dois segmentos. Então a soma dos termos da P.A. será

$$2 \cdot (3 + 5 + 6 + 7 + 9) = 60.$$

Assim, o termo médio é $\frac{60}{5} = 12$.

12. (Adaptado do AMC − 2016)
Seja x a medida da largura do retângulo interior, consequentemente sua área será $x \cdot 1 = x$ m^2. O segundo maior retângulo terá dimensões $x+2$ e 3, com área $3x+6$ m^2. A área da segunda área sombreada será $3x+6-x = 2x+6$. O maior retângulo tem medidas $x+4$ e 5, fazendo um área de $5x+20$ m^2. E a área da maior região sombreada será $(5x+20)-(3x+6) = 2x+14$. Assim, a sequência $x, 2x+6, 2x+14$ é uma P.A. e pela regra de ouro da P.A. temos

$$\begin{aligned}(2x+6)-x &= (2x+14)-(2x+6)\\ x+6 &= 8\\ x &= 2.\end{aligned}$$

13. (Adaptado do vestibular da PUC (RS))
Temos que $a_1 = \dfrac{5\cdot 1-1}{2} = 2$ e $a_{11} = \dfrac{5\cdot 11-1}{2} = 27$. Assim temos que

$$S_{11} = \frac{(2+27)\cdot 11}{2} = \frac{319}{2}.$$

14. (Adaptado do vestibular da UFCE)
Do enunciado temos que $d = 400$ e podemos escrever

$$\begin{aligned}S_{11} &= \frac{(a_1+a_{11})\cdot 11}{2}\\ S_{11} &= \frac{(a_{11}-10\cdot d+a_{11})\cdot 11}{2}\\ 35200 &= \frac{(2a_{11}-10\cdot 400)\cdot 11}{2}\\ 35200 &= (a_{11}-2000)\cdot 11\\ 3200 &= a_{11}-2000\\ a_{11} &= 5200.\end{aligned}$$

15. (Adaptado do vestibular da UFSCar)
Podemos escrever que

$$\begin{aligned}a_{100}+b_{100} &= 496\\ a_1+99d+b_1+99d &= 496\\ 75+198d+25 &= 496\\ 198d &= 496-100\\ d &= \frac{396}{198} = 2.\end{aligned}$$

O que permite calcular

$$\frac{a_{100}}{b_{100}} = \frac{a_1+99d}{b_1+99d} = \frac{75+99\cdot 2}{25+99\cdot 2} = \frac{273}{223}.$$

16. (Adaptado do vestibular da UESB (BA))
Sabemos que

$$S_{15} = a_1+a_2+\ldots+a_{15}$$

e

$$S_{14} = a_1+a_2+\ldots+a_{14}$$

e daí

$$S_{15}-S_{14} = a_{15}.$$

Usando a regra do enunciado temos que

$$\begin{aligned}a_{15} &= S_{15}-S_{14}\\ &= 15^2-6\cdot 15-(14^2-6\cdot 14)\\ &= 15^2-14^2-6\cdot 15+6\cdot 14\\ &= (15-14)(15+14)-6(15-14)\\ &= 29-6 = 23.\end{aligned}$$

17. (Extraído da AIME)
Depois de somar os números ímpares houve um aumento de

$$836-715 = 121 = 11^2.$$

Como a soma de n ímpares positivos é n^2, a sequência precisa ter 11 termos. Daí, concluímos que o termo médio vale $\dfrac{715}{11} = 65$. Como o três termos pedidos são equidistantes entre si, temos que a $a_1+a_6+a_{11} = 3\cdot a_6$, o que gera $65\cdot 3 = 195$

18. (Adaptado do vestibular da UCSal (BA))
Podemos considerar o valor de Março como $a_1 = 18$, destacando que $d = 13$ e calcularemos que dezembro será o

$$a_{10} = a_1+9d = 18+9\cdot 13 = 135.$$

19. (Extraído do Banco de Questões da OBMEP)

a) Se $a_1 = 2$ e $r = 3$, temos

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1+3 = 5\\ a_3 &= a_2+3 = 8\\ a_4 &= a_3+3 = 11.\end{aligned}$$

b) Sejam $a_1 = d$ e r a razão. Então, temos:

$$\begin{array}{llll} a_1 = d, & a_2 = d+r, & a_3 = d+2r, & a_4 = d+3r,\\ a_5 = d+4r, & a_6 = d+5r, & a_7 = d+6r, & a_8 = d+7r,\\ a_9 = d+8r, & a_{10} = d+9r, & a_{11} = d+10r. & \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}a_4+a_7+a_{10} &= (d+3r)+(d+6r)\\ &+ (d+9r)\\ 217 &= 3(d+6r).\\ a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11} &= (d+4r)+(d+5r)+\ldots\\ &+ (d+10r)\\ 553 &= 7(d+7r).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} d+6r = 207/3 = 69,\\ d+7r = 553/7 = 79.\end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $r = 10$ e $d = 9$. Assim, $a_{11} = d+10r = 109$.

20. Seja L_n o valor pago no n-ésimo dia. O problema no diz que $L_{n+1} = L_n + (n+1)$ e que:

$$\begin{array}{rcl} L_{n+1} & = & L_n + (n+1) \\ L_n & = & L_{n-1} + n \\ L_{n-1} & = & L_{n-2} + (n-1) \\ & \dots & \\ L_2 & = & L_1 + 2 \end{array}$$

Somando tudo, obtemos um cancelamento de vários termos, e assim

$$L_{n+1} = (n+1) + n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

21. Suponha que

$$n = m + (m+1) + (m+2) + \ldots + (m+k),$$

com m e k inteiros positivos. Então $n = \dfrac{(k+1)(2m+k)}{2}$. Se k é ímpar, então $(k+1)/2$ é um inteiro e $2m+k$ é um divisor ímpar de n. Se k é par, então $(2m+k)/2$ é inteiro e $k+1$ é um divisor ímpar de n. Em ambos os casos, n possui um divisor ímpar maior que 1 e isso o obriga a não ser uma potência de 2. Para verificar que todo inteiro positivo n que não é uma potência de 2 pode ser escrito como soma de inteiros positivos consecutivos, através de sua fatoração em primos, podemos escrevê-lo como $2^a(2b+1)$. Se $b < 2^a$, podemos escrever

$$n = (2^a - b) + (2^a - b + 1) + \ldots + (2^a + b).$$

Se $b \geq 2^a$, podemos escrevê-lo como

$$n = (b - 2^a + 1) + (b - 2^a + 2) + \ldots + (b + 2^a).$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com