Inequações Mistas e Sistemas

Sistemas de Inequações Mistas

1° ano E.M.

Portal da Matemática
OBMEP

Inequações Mistas e Sistemas
Sistemas de Inequações Mistas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em cada ítem, encontre os valores reais de x que satisfazem o sistema dado.

(a) $\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) \leq 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (x-1)^2(3x+2) \geq 0 \\ -1 - x \leq 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x^3(1-x) \geq 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x+4 > 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \\ x^3 < 0 \end{cases}$

Exercício 2. Encontre o conjunto solução dos seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x^5(x^2+1) \leq 0 \\ (4-x)|x+2| > 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (x^2+2x-3)(x+3) \leq 0 \\ 3(x-1) \geq 0 \end{cases}$

(c) $-1 \leq \dfrac{2x^2-1}{1+x^2} \leq 2$

(d) $0 \leq \dfrac{1-x}{3-2x} \leq 2$

Exercício 3. Mostre que o sistema $\begin{cases} x + 1/x \geq 2 \\ (x+1)^3x^2 < 0 \end{cases}$ tem conjunto solução vazio.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Andressa e Mariana querem juntar 20 mil reais para fazer uma grande viagem. Como elas não recebem o mesmo salário, combinaram que Andressa vai dar 40% desse valor e Mariana o restante. Hoje, cada uma delas tem 5 mil guardado. Nos meses seguintes Andressa vai guardar 200 reais por mês e Mariana 300 reais por mês. Em quantos meses elas poderão fazer a viagem?
(a) 20 meses (b) 24 meses (c) 35 meses (d) 40 meses

Exercício 5. Resolva as inequações modulares em $\mathbb{R}$.
(a) $||x| - 2| \leq 3$
(b) $|2x+1| \leq |1-2x|$

Exercício 6. Quantos inteiros satisfazem a inequação $0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x|$?

Exercício 7. Se $b < 0 < a < a + b$, para quais valores de x vale que $0 \leq \frac{ab}{(x-a)(x-b)} \leq 1$?

Exercício 8. Seja $f(x) = 1/(x+1)$, para $x \neq -1$ e $g(x) = 1/(x-1)$, para $x \neq 1$. Determine o domínio onde $h = \sqrt{f+g}$ está bem definida e vale que $h \leq 1$.

Exercício 9. Seja $g(x) = x - 3\sqrt{x}$, para $x \geq 0$ e $f(x) = (x+3)/(x-1)$, para $x \neq 1$. Determine o maior domínio D onde $g \circ f \geq 0$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Para quais valores de x vale que

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} - \left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2 < 0?$$

Exercício 11. A solução da seguinte inequação é da forma $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Determine o valor de a.

$$\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}} \geq 2$$

Exercício 12. Para quais valores de m a inequação

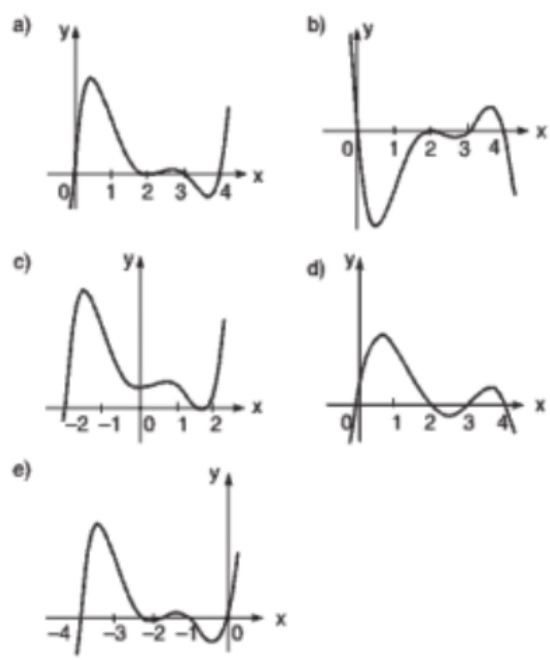
$$|2x - 4m + 1/2| \leq 3/2 - m$$

tem conjunto solução
(a) igual a $\mathbb{R}$?
(b) vazio?
(c) unitário?
(d) da forma $[a, b]$?

Exercício 13. Para quais valores de m a inequação a seguir é válida para todo $x \geq 1$?

$$(x^3 + 2x + m)^2 - (x^3 - m + x)^2 \geq 0$$

Exercício 14. (Fuvest) Dado o polinômio $p(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$, o gráfico da função $y = p(x-2)$ é melhor representado por:

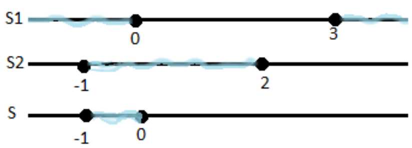


Respostas e Soluções.

1. *(a)* Temos

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases}.$$

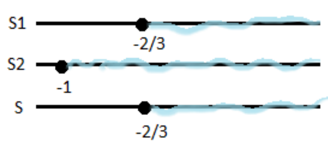
Resolvendo a primeira inequação $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \quad ou \quad x \geq 3\} = (-\infty, 0] \cap [3, +\infty)$. Resolvendo a segunda inequação $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1 \quad e \quad x \leq 2\} = [-1, 2]$. O conjunto solução $S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 0\} = [-1, 0]$. A interseção pode ser vista no diagrama.



(b) Temos

$$\begin{cases} (x-1)^2(3x+2) \geq 0 \\ -1 - x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2/3 \\ x \geq -1 \end{cases},$$

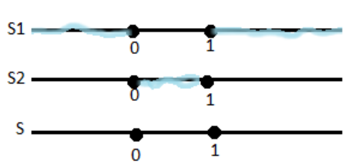
onde a segunda equivalência vem do fato que $(x-1)^2 \geq 0$ para todo x. Assim, $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -2/3\} = [-2/3, +\infty)$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\} = [-1, +\infty)$ e $S = S_1 \cap S_2 = S_1$. A interseção pode ser vista no diagrama.



(c) Temos

$$\begin{cases} -x^3(1-x) \geq 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(x-1) \geq 0 \\ x(1-x) \geq 0 \end{cases}.$$

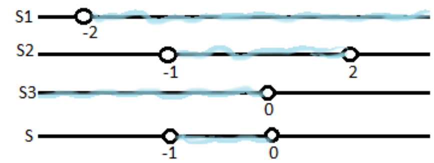
Note que $x^3 \geq 0$ para $x \geq 0$ e $x^3 < 0$ para $x < 0$. Expoentes ímpares conservam o sinal da base. Aqui, $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \quad ou \quad x \geq 1\} = (-\infty, 0] \cap [1, +\infty)$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$ e $S = S_1 \cap S_2 = \{0, 1\}$. A interseção pode ser vista no diagrama.



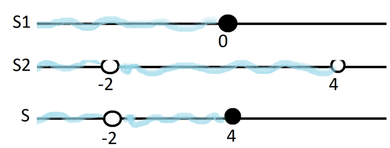
(d) Temos

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \\ x^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ (x+1)(x-2) < 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Aqui, $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x > -2\} = (-2, +\infty)$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 2\} = (-1, 2)$, $S_3 = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\} = (-\infty, 0)$ e $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (-1, 0)$. A interseção pode ser vista no diagrama.



2. *(a)* Como $x^2 + 1 > 0$ para todo x, devemos ter $x^5 \leq 0$, o que nos dá $x < 0$ (expoente ímpar conserva o sinal). Como $|x+2| \geq 0$ para todo x e $|x+2| = 0$ apenas em $x = -2$, devemos ter $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ e $x \neq -2$. Assim $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ e $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x < 4 \quad e \quad x \neq -2\}$. Logo, $S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \quad e \quad x \neq -2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0]$. A intersecção pode ser vista no diagrama.



(b) Fatorando o polinômio de grau 2, $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, a inequação se torna $(x+3)^2(x-1) \leq 0$. Como $(x+3)^2 \geq 0$ para todo x, devemos ter $x - 1 \leq 0$, o que nos dá $x \leq 1$. Da outra inequação temos $x \geq 1$. Intersectando as duas soluções temos apenas $x = 1$. Assim, $S = \{1\}$.

(c) Note que $1 + x^2 > 0$ para todo x, então podemos multiplicar toda a inequação por $1 + x^2$ sem alterar as desigualdades. Assim, $-(1 + x^2) \leq 2x^2 - 1 \leq 2(1 + x^2)$. Reescrevendo as duas inequações como um sistema temos $x^2 \geq 0$ e $-1 \leq 2$, as quais são satisfeitas para qualquer x. Portanto, $S = \mathbb{R}$.

(d) Diferente do ítem anterior, não podemos multiplicar todas as inequações por $3 - 2x$ sem levar em conta seu sinal. Então, vamos separar no sistema $\begin{cases} \dfrac{1-x}{3-2x} \geq 0 (I) \\ \dfrac{1-x}{3-2x} \leq 2 (II) \end{cases}$

Somando -2 na inequação (II), a reescrevemos como $(3x - 5)/(3 - 2x) \leq 0$. Temos $S_1 = (-\infty, -1] \cup (3/2, +\infty)$ e $S_2 = (-\infty, 3/2) \cup [5/3, +\infty)$. Assim $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, 1] \cap [5/3, +\infty)$.

3. Reescrevendo a primeira inequação, $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$. Como $(x-1)^2 \geq 0$ (expoente par) e $x \neq 0$ (pelo denominador da fração), devemos ter $x > 0$. Na segunda inequação, como $x^2 \geq 0$ (expoente par), devemos ter $(x+1)^3 < 0$, o que nos dá $x + 1 < 0$ (expoente ímpar conserva o sinal) e, portanto, $x < -1$. A solução do sistema é então $(0, +\infty) \cap (-\infty, -1) = \emptyset$.

4. Andressa tem 5 mil reais e a cada mês vai guardar 200 reais, até que chegue em pelo menos 40% de 20 mil.

Escrevemos isso como $5000 + 200x \geq \frac{40}{100}.20000 = 8000$. Fazendo o análogo para Mariana, escrevemos $5000 + 300x \geq 20000 - 8000 = 12000$. Resolvendo as duas inequações para x encontramos $x \geq 15$ na primeira e $x \geq 70/3 = 23,\overline{33}$. Andressa precisa de 15 meses e Mariana de 24. Logo, em 24 meses as duas terão os valores combinados. Letra *(b)*.

5. Lembre que $|y| \leq a \Leftrightarrow -a \leq y \leq a$ e $|y| \geq a \Leftrightarrow y \geq a$ ou $y \leq -a$.

(a) Temos $||x| - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq |x| - 2 \leq 3$. Somando 2 em todas as partes das inequações temos $-1 \leq |x| \leq 5$. Note que $|x| \geq -1$ para todo x, pois $|x| \geq 0$. Assim, basta analisar $|x| \leq 5$, o que nos dá $-5 \leq x \leq 5$. Logo, $S = (-5, 5)$.

(b) Temos $|2x + 1| \leq |1 - 2x| \Leftrightarrow -|1 - 2x| \leq 2x + 1 \leq |1 - 2x|$, donde reescremos como o sistema $\begin{cases} |1-2x| \geq -(2x+1) \\ |1-2x| \geq 2x+1. \end{cases}$
Resolvendo as duas inequações encontramos $x \geq 0$ e $x \leq 0$. Intersectando as soluções temos apenas $x = 0$. Logo, a solução é o unitário $S = \{0\}$.

6. Reescrevendo a desigualdade como $|3x^2 + 8x| \leq x^2$. Usando a aritmética modular chegamos ao sistema $\begin{cases} x(4x+8) \geq 0 & (I) \\ x(2x+8) \leq 0 & (II). \end{cases}$ A solução de (I) é $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ e a solução de (II) é $[-4, 0]$. Intersectando os dois conjuntos temos $x \in [-4, -2] \cup \{0\}$. Os inteiros nesse conjunto são $-4, -3, -2$ e 0. Logo, há quatro inteiros que satisfazem a inequação.

7. O quociente não está definido para $x = a, b$. Reescrevendo as inequações como um sistema temos

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{(x-a)(x-b)} \geq 0 & (I) \\ \dfrac{ab}{(x-a)(x-b)} \leq 1 & (II). \end{cases}$$

De (I), como $ab < 0$, devemos ter $(x - a)(x - b) < 0$. Multiplicando os dois lados da inequação em (II) por $(x - a)(x - b) < 0$ chegamos a $x[x - (a + b)] \leq 0$. Temos aqui o sistema equivalente $\begin{cases} (x-a)(x-b) < 0 & (III) \\ x[x-(a+b)] \leq 0 & (IV). \end{cases}$
De (III), como $b < a$, temos $x \in (b, a)$. De (IV), como $a + b > 0$, temos $x \in [0, a + b]$. Como $b < 0 < a$, intersectando esses conjuntos temos $x \in [0, a)$.

8. Queremos resolver o sistema $\begin{cases} f+g \geq 0 & (I) \\ \sqrt{f+g} \leq 1 & (II). \end{cases}$
De (I) chegamos em $(1 - x)(1 + x) \geq 0$, o que nos dá $(-1, 1)$. Tomando x nesse intervalo temos que $\sqrt{f + g} \leq 1$ equivale a $f + g \leq 1$, já que aí $f + g \geq 0$. Então, de (II), chegamos em $(1 - x)(1 + x) < 0$, o que contradiz o resultado em (I). Logo, não podemos definir um domínio, pois não existe x que satisfaça o problema.

9. Para a composição estar bem definida, precisamos que $x \neq 1$, pela definição de f, e que $f(x) \geq 0$, pela definição de g. Assim, queremos resolver

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(f(x)) \geq 0. \end{cases}$$

Denote $y = f(x) \geq 0$. Resolvendo $g(y) = y - 3\sqrt{y} \geq 0$, encontramos que $y \geq 3$. Intersectando com $y \geq 0$, temos como resultado $y \geq 3$. Agora, basta encontrar os valores de x tais que $y = f(x) \geq 3$. Isto é, $\frac{x+3}{x-1} \geq 0$, o que nos dá $x \geq 1$ e $x \leq 3$. Lembrando que devemos ter $x \neq 1$, temos como solução $D = (1, 3]$.

10. Note que a inequação pode ser reescrita como

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2 < 0$$

e que ela não está definida para $x = 1$. Denotamos $y = (x + 1)/(x - 1)$ e reescrevemos a inequação como $y^2 - |y| - 2 < 0 \Leftrightarrow |y| < 2 - y^2$. Usando as propriedades de módulos e analisando os sinais, temos $-1 < y < 1$. Voltando para a variável x original, resolvemos $-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1$ e encontramos $x < 0$. Assim, a inequação vale para o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$.

11. Para a inequação estar definida devemos ter os denominadores das frações não nulos e os argumentos das raízes quadradas não negativos. Note que os argumentos das raízes são um o inverso do outro. E, portanto, não podem ser nulas. Assim, devemos ter $x \neq -1/2, 1/2$ e $(2x + 1)/(2x - 1) > 0$ (poderia trabalhar com a outra fração). Denotando $t = \sqrt{(2x + 1)/(2x - 1)}$, podemos reescrever a inequação como $t + 1/t \geq 2$, a qual tem solução $t > 0$, como visto no Exercício 3. Enfim, basta resolver $(2x + 1)/(2x - 1) > 0$. Esta inequação tem conjunto solução $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$, logo $a = 1/2$.

12. Reescrevendo a inequação modular como um sistema encontramos a solução $x \geq (5m - 2)/2$ e $x \leq (3m + 1)/2$.
(a) É claro que não existe m tal que o conjunto solução seja $\mathbb{R}$.
(b) Para $S = \emptyset$, devemos ter $(5m - 2)/2 > (3m + 1)/2$, o que nos dá $m > 3/2$.
(c) Para que S seja unitário devemos ter $(5m - 2)/2 = (3m + 1)/2$, o que nos dá $m = 3/2$.
(d) Para que S seja $[a, b]$ devemos ter $(5m - 2)/2 < (3m + 1)/2$, o que nos dá $m < 3/2$.

13. Como $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, reescrevemos a inequação como $(2x^3 + 3x)(2m + x) \geq 0$. Para $x \geq 1$, $(2x^3 + 3x) > 0$. Então basta encontrar m tal que $2m + x \geq 0$, para todo $x \geq 1$. Aqui, como $2m + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2m$, devemos ter $-2m \leq 1$, o que acontece só para $m \geq -1/2$.

14. Calculando $y = p(x - 2)$ temos

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2(x-3)((x-2)^2 - 4) \\ &= (x-2)^2(x-3)(x^2 - 4x) \\ &= (x-2)^2(x-3)x(x-4). \end{aligned}$$

Fazendo a análise de sinal de $y = p(x-2)$, temos que $y = 0$ para x em $\{0, 2, 3, 4\}$, $y > 0$ para x em $(0, 3) \cup (4, +\infty)$ e $y < 0$ para x em $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$. O único gráfico que satisfaz essa análise é o gráfico (a).