Números Complexos – Forma Algébrica

Soma e Produto de Números Complexos na Forma Algébrica

Material elaborado por Letícia Mattos.

Números Complexos – Forma Algébrica
Soma e Produto de Números Complexos na Forma Algébrica

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule i^2, i^3, i^4, i^5, e observe que as potências começam a se repeter depois de i^4. Comprove esse fato mostrando que $i^{4n+r} = i^r$ para todos $n, r \in \mathbb{N}$. Aplique este resultado para calcular:

(a) i^{20}

(b) i^{72}

(c) i^{1041}

(d) $(1+i)^{12}$

Exercício 2. Escreva na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $18i^5 + 7i^{10} - (2i)^4$

(b) $(2-3i)^2$

(c) $(1+2i)^3$

Exercício 3. Encontre as raízes complexas das seguintes equações:

(a) $x^2 - 8x + 17 = 0.$

(b) $x^2 - 2x + 26 = 0.$

(c) $x^2 - 2x + 2 = 0.$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Determine um polinômio de segundo grau com coeficientes reais que admite $1 - 3i$ como raíz.

Exercício 5. Determine todas as soluções complexas das equações abaixo.

(a) $z^2 = 1 + 2i$

(b) $iz^2 + (i+1)z + 2 = 0$

Exercício 6. Para cada número complexo z abaixo, determine w tal que $z \cdot w = 1$.

(a) $z = i$

(b) $z = 1 + i$

(c) $z = 2 + 5i$

(d) $z = -1 + 4i$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Mostre que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1$.

Exercício 8. Determine as raízes quadradas de

(a) -4

(b) i

(c) $3 - 4i$

Exercício 9. Prove que

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Respostas e Soluções.

1. A partir da igualdade $i^2 = -1$, podemos ver que

$$\begin{cases} i^3 & = i^2 \cdot i = -i, \\ i^4 & = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1, \\ i^5 & = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i. \end{cases} \tag{1}$$

Agora, vamos formalizar o padrão acima. Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ números quaisquer. Agora, vamos calcular i^{4n+r}:

$$\begin{aligned} i^{4n+r} &= (i^4)^n \cdot i^r \\ &= 1 \cdot i^r \\ &= i^r. \end{aligned}$$

A segunda igualdade acima segue de 1. Vamos utilizar isso para resolver cada um dos itens dessa questão.

(a) Como $20 = 4 \cdot 5 + 0$, temos $i^{20} = i^0 = 1$.

(b) Como $72 = 4 \cdot 18 + 0$, temos $i^{72} = i^0 = 1$.

(c) Primeiro, veja que $1041 = 1000 + 40 + 1$. Logo,

$$i^{1041} = i^{1000} \cdot i^{40} \cdot i.$$

Como 4 divide 40 e 1000, temos $i^{40} = i^{1000} = 1$. Segue que $i^{1041} = 1 \cdot i = 1$.

(d) Pelo Binômio de Newton, temos

$$(1+i)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot i^k.$$

Agora, por 1, note que

$$\begin{cases} i^{2k} = (-1)^k; \\ i^{2k+1} = i \cdot (-1)^k. \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, a parte real de $(1+i)^{12}$ é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{2k} \cdot i^{2k} &= \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{2k} \cdot (-1)^k \\ &= -64 \end{aligned}$$

E a parte imaginária é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{5} \binom{12}{2k+1} \cdot i^{2k+1} &= i \cdot \sum_{k=0}^{5} \binom{12}{2k+1} \cdot (-1)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Os cálculos acima foram feitos com o auxílio de uma calculadora. Portanto, concluímos que

$$(1+i)^{12} = -64.$$

2. Nesta questão também faremos uso das identidades em 1.

(a) Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} i^4 &= 1 \\ i^5 &= i^{4+1} = i \\ i^{10} &= (i^5)^2 = -1. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} 18i^5 + 7i^{10} - (2i)^4 &= 18i - 7 - 16 \\ &= -23 + 18i. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} (2-3i)^2 &= 4 - 12i + (3i)^2 \\ &= 4 - 12i - 9 \\ &= -5 - 12i \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} (1+2i)^3 &= 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot (2i) + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 \\ &= 1 + 6i - 12 - 8i \\ &= -11 - 2i \end{aligned}$$

3.

(a) Completando quadrados, temos que

$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 17 = 0 &\iff (x-4)^2 = -1 \\ &\iff (x-4)^2 = i^2 \end{aligned}$$

Utilizando o produto notável da diferença de dois quadrados, segue que

$$(x-4)^2 = i^2 \iff (x-4+i)(x-4-i) = 0$$

Logo, concluímos que as raízes são $4 - i$ e $4 + i$.

(b) Completando quadrados, temos que

$$x^2 - 2x + 26 = 0 = (x-1)^2 + 25.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 26 = 0 &\iff (x-1)^2 = -25 \\ &\iff (x-1)^2 = (5i)^2 \end{aligned}$$

Utilizando o produto notável da diferença de dois quadrados, segue que

$$(x-1)^2 = (5i)^2 \iff (x-1+5i)(x-1-5i) = 0$$

Logo, concluímos que as raízes são $1 - 5i$ e $1 + 5i$.

(c) Completando quadrados, temos que

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 = 0 &\iff (x-1)^2 = -1 \\ &\iff (x-1)^2 = i^2 \end{aligned}$$

Utilizando o produto notável da diferença de dois quadrados, segue que

$$(x-1)^2 = i^2 \iff (x-1+i)(x-1-i) = 0$$

Logo, concluímos que as raízes são $1 - i$ e $1 + i$.

4. Seja P um polinômio de segundo grau, com coeficientes reais, tal que $P(1-3i)=0$. Denote por $z=a+bi$ a sua outra raiz. Sem perda de generalidade, assuma que o coeficiente de x^2 em P é igual a 1. Então, devemos ter

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1+3i)(x-a-bi) \\ &= x^2+\big(-a-1+(3-b)i\big)x-(a+bi)(-1+3i) \end{aligned}$$

Veja que o coeficiente de x em P é igual a $-a-1+(3-b)i$. Como esse coeficiente deve ser real, devemos ter $b=3$. Substituindo $b=3$ na expressão acima, ficamos com

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2-(a+1)x-(a+3i)(-1+3i) \\ &= x^2-(a+1)x+a+9-(3a-3)i \qquad (2) \end{aligned}$$

Como o termo independente do polinômio P também deve ser um número real, devemos ter $3a=3$, isto é, $a=1$. Concluímos que a outra raiz do polinômio P é $1+3i$. Substituindo o valor de a em 2, segue que

$$P(x)=x^2-2x+10.$$

5.

(a) Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $z=a+bi$. Por $z^2=1+2i$, segue que

$$a^2+2abi-b^2=1+2i.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ ab=1 \end{cases}$$

Agora, nos resta resolver esse sistema para encontrar os valores de a e b. Elevando ao quadrado ambos os lados da última equação, temos

$$\begin{cases} a^2=1+b^2 \\ a^2b^2=1. \end{cases}$$

Substituindo o valor de a^2 da primeira equação na segunda, obtemos $b^2(1+b^2)=1$, que é equivalente a $b^4+b^2-1=0$. Ora, isso é nada mais que uma equação de segundo grau na variável b^2. Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos $b^2=(-1\pm\sqrt{5})/2$. Mas, como $b\in\mathbb{R}$, devemos ter

$$b^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Da igualdade $a^2=1+b^2$, também inferimos que

$$a^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Como $ab=1$, segue que os números complexos $a+bi$ que satisfazem a equação iniciais são

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

e

$$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

(b) Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $z=a+bi$. Da equação $iz^2+(i+1)z+2=0$, segue que

$$\begin{aligned} i(a+bi)^2+(i+1)(a+bi)+2=0 &\iff \\ i(a^2+2abi-b^2)+ai-b+a+bi+2=0 &\iff \\ \big(a-b-2ab+2\big)+\big(a^2-b^2+a+b\big)i=0. \end{aligned}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} a-b-2ab+2=0 \\ a^2-b^2+a+b=0. \end{cases}$$

Agora, nos resta resolver esse sistema para encontrar os valores de a e b. Primeiro, vamos simplificar a última equação do sistema. Ela é equivalente a

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b)+(a+b)=0 &\iff \\ (a+b)\cdot(a-b+1)=0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Primeiro, vamos supor que $a+b=0$. Então, $b=-a$ e a primeira equação do sistema nos dá

$$-2a(-a)+2=0 \iff a^2=-1.$$

Neste caso não temos solução porque a não é real. Então, por 3, segue que $b=a+1$ e a primeira equação do sistema nos dá

$$\begin{aligned} -1-2a(a+1)+2=0 &\iff 2a^2+2a-1=0 \\ &\iff a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Segue que os números complexos $a+bi$ que satisfazem a equação iniciais são

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot i$$

e

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot i.$$

6.

(a) Como $i^2=-1$, temos $i\cdot(-i)=1$ e então $w=-i$.

(b) Observe que $(1+i)(1-i)=2$. Assim,

$$(1+i)\cdot\left(\frac{1-i}{2}\right)=1,$$

e então $w=(1-i)/2$.

(c) Observe que $(2+5i)(2-5i)=29$. Assim,

$$(2+5i)\cdot\left(\frac{2-5i}{29}\right)=1,$$

e então $w=(2-5i)/29$.

$z=2+5i$

(d) Observe que $(-1+4i)(-1-4i)=17$. Assim,

$$(-1+4i)\cdot\left(\frac{-1-4i}{17}\right)=1,$$

e então $w=-(1+4i)/17$.

7. Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $z = a + bi$. Veja que

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{4}$$

Agora, afirmamos que $a^2 + b^2 \neq 0$. De fato, $a^2 + b^2 = 0$ se e somente se $a = b = 0$. Como supomos $z \neq 0$, devemos ter $a^2 + b^2 > 0$. De 4, segue que

$$(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 1$$

Isso prova a nossa afirmação.

8.

(a) Note que $-4 = (2i)^2$. Logo, as raízes quadradas de -4 são $-2i$ e $2i$.

(b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $(a + bi)^2 = i$. Essa igualdade é equivalente a $a^2 - b^2 + (2ab - 1)i = 0$. Assim, devemos ter

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab - 1 = 0 \end{cases}$$

Pela segunda equação do sistema acima, temos $b = 1/(2a)$. Pela primeira equação, segue que $a^2 = 1/(4a^2)$, o que nos dá $a = \pm\sqrt{2}/2$. Assim, as raízes são

$$-\sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/2)i$$

e

$$\sqrt{2}/2 + (\sqrt{2}/2)i.$$

(c) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $(a + bi)^2 = 3 - 4i$. Essa igualdade é equivalente a $a^2 - b^2 - 3 + (2ab + 4)i = 0$. Assim, devemos ter

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Agora, nos resta resolver esse sistema para encontrar os valores de a e b. Dividindo por 2 e elevando ao quadrado ambos os lados da última equação, temos

$$\begin{cases} a^2 = 3 + b^2 \\ a^2 b^2 = 4. \end{cases}$$

Substituindo o valor de a^2 da primeira equação na segunda, obtemos $b^2(3 + b^2) = 4$, que é equivalente a $b^4 + 3b^2 - 4 = 0$. Isso é nada mais que uma equação de segundo grau na variável b^2. Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos $b^2 = (-3 \pm 5)/2$. Mas, como $b \in \mathbb{R}$, devemos ter $b^2 = 1$. Da igualdade $ab = -2$ inferimos que as raízes são $2 - i$ e $-2 + i$.

9. Pelo binômio de Newton, temos que as expressões $(1 + i)^n$ e $(1 - i)^n$ são iguais a

$$(1 + i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot i^k$$

e

$$(1 - i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-i)^k.$$

Através dessas expressões, vamos encontrar as partes imaginárias de $(1 + i)^n$ e $(1 - i)^n$. Primeiro note que, por 1,

$$\begin{cases} i^{2k} = (-1)^k \\ i^{2k+1} = i \cdot (-1)^k, \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, a parte imaginária de $(1 + i)^n$ é dada por

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} \cdot i^{2k+1} = i \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} \cdot (-1)^k$$

Analogamente, a parte imaginária de $(1 - i)^n$ é dada por

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} \cdot (-i)^{2k+1} = i \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} \cdot (-1)^k \cdot (-1)^{2k+1}$$

Agora, observe que $(-1)^k \cdot (-1)^{2k+1} = -(-1)^k$. Então, se somarmos as duas expressões acima, podemos ver que todos os termos se cancelam. Portanto, devem existir $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ para os quais

$$(1 + i)^n = a_1 + bi \qquad \text{e} \qquad (1 - i)^n = a_2 - bi.$$

Concluímos que $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ é um número real, como queríamos.

Material elaborado por Letícia Mattos.