Equações Algébricas – Raízes e Coeficientes

Fórmulas Resolutivas – Primeiro Método

Material elaborado por Letícia Mattos.

Equações Algébricas – Raízes e Coeficientes
Fórmulas Resolutivas – Primeiro Método

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sabendo-se que -1 é uma solução da equação

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0,$$

encontre as demais soluções

Exercício 2. Para cada um dos itens a seguir, encontre todas as soluções para a equação:

(a) $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = 0.$

(b) $x^3 + 3x^2 + 3x - 2 = 0.$

(c) $x^3 + x^2 + 10x - 3 = 0.$

Exercício 3. Encontre todas as soluções para a equação

$$5x^4 + 20x^3 - 40x + 17 = 0.$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Considere o polinômio

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x - \sqrt{2}.$$

Sabendo-se que P tem uma raíz da forma $a + \sqrt{2}$, com $a \in \mathbb{Q}$, encontre todas as raízes de P.

Exercício 5. Suponha que a equação

$$x^3 + qx + r = 0$$

tenha duas raízes iguais. Prove que

$$4q^3 + 27r^2 = 0.$$

Exercício 6. Prove que a equação

$$y^3 - 3y = 1$$

não possui soluções racionais.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Seja $n \in \mathbb{N}$ e

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

um polinômio, onde $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Mostre que, se p/q é uma raíz de P, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então q divide a_n e p divide a_0.

Exercício 8. Determine todos os inteiros positivos k para os quais o polinômio

$$P(x) = x^3 + (k+12)x^2 + (43-k)x - 56$$

possua apenas raízes inteiras. *Dica: a soma dos coeficientes desse polinômio é igual a 0*

Exercício 9. Encontre todas as triplas ordenadas de inteiros (x, y, z) que satisfazem as equações

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$$

A seguir, usamos a notação $a \mid b$ para dizer que a divide b. Para resolver o próximo exercício, precisamos do seguinte lema. Use-o sem prová-lo.

Lema. Sejam $s, t \in \mathbb{Z}$ e p um número primo ímpar que deixa resto 2 na divisão por 3. Se

$$p \mid s^2 - st + t^2,$$

então $p \mid s$ e $p \mid t$.

Exercício 10. Encontre todos os pares (a, b) de inteiros positivos que satisfazem a seguinte equação:

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 4} = 2020.$$

Respostas e Soluções.

1. Sejam a e b as outras duas soluções da equação

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Logo, temos que

$$(x - a)(x - b)(x + 1) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$$

Comparando os dos coeficientes de x^2, x e do termo constante em ambos os lados da equação acima, ficamos com o seguinte sistema

$$\begin{cases} 1 - a - b = 6 \\ ab - a - b = 11 \\ ab = 6. \end{cases}$$

Da primeira equação podemos ver que $a + b = -5$. Como $ab = 6$, devemos ter $\{a, b\} = \{-2, -3\}$. Logo, as outras soluções da nossa equação inicial são -2 e -3.

2.

(a) A equação $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = 0$ é equivalente a

$$x^3 - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{16} - 1 = 0$$

Observe que o coeficiente do termo x^2 acima é $a := -3/4$. O primeiro passo para resolver essa equação de terceiro grau é eliminar o termo quadrático. Para isso, fazemos a mudança de variável $x = t - a/3$. Assim, temos

$$\left(t + \frac{1}{4}\right)^3 - \frac{3}{4} \cdot \left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16} \cdot \left(t + \frac{1}{4}\right) - 1 = 0.$$

Logo, ficamos com

$$t^3 = 0.$$

Obviamente a solução para essa equação é $t = 0$. Portanto, a solução para a equação original é $1/4$.

(b) Seja $a := 3$ o coeficiente do termo quadrático. O primeiro passo para resolver essa equação de terceiro grau é eliminar o termo quadrático. Para isso, fazemos a mudança de variável $x = t - a/3$. Assim, temos

$$(t - 1)^3 + 3(t - 1)^2 + 3(t - 1) - 2 = 0.$$

Logo, ficamos com

$$t^3 = 3.$$

As soluções dessa última equação são

$$\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\exp(2\pi i/3) \text{ e } \sqrt[3]{3}\exp(2\pi i/3).$$

Aqui, usamos a notação $\exp(\theta i) = \cos(\theta) + i\,sen(\theta)$. Como $x = t - 1$, segue que as soluções da equação inicial são

$$\sqrt[3]{3} - 1,\ \sqrt[3]{3}\exp(2\pi i/3) - 1 \text{ e } \sqrt[3]{3}\exp(2\pi i/3) - 1.$$

(c) Seja $a := 1$ o coeficiente do termo quadrático. O primeiro passo para resolver essa equação de terceiro grau é eliminar o termo quadrático. Para isso, fazemos a mudança de variável $x = t - a/3$. Assim, temos

$$\left(t - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 10\left(t - \frac{1}{3}\right) - 3 = 0.$$

Logo, ficamos com

$$t^3 = -\frac{29t}{3} + \frac{35}{9}. \tag{1}$$

O segundo passo é efetuar a substituição $t = u + v$. Elevando ambos os lados da equação $t = u + v$ ao cubo, ficamos com

$$\begin{aligned} t^3 &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v) \\ &= u^3 + v^3 + 3uvt. \end{aligned} \tag{2}$$

A comparação de coeficientes em (1) e (2) fornece

$$\begin{cases} 3uv = -\frac{29}{3} \\ u^3 + v^3 = \frac{35}{9}. \end{cases}$$

Vamos encontrar as soluções do sistema acima através da resolução de uma equação de segundo grau. Para isso, elevamos ambos os lados da primeira equação ao cubo e fazemos a mudança de variável $r = u^3$ e $s = v^3$. Assim, obtemos

$$\begin{cases} rs = -\frac{29^3}{3^6} \\ r + s = \frac{35}{9}. \end{cases}$$

Resolver o sistema acima é equivalente a resolver a equação

$$z^2 - \frac{35z}{9} - \frac{29^3}{3^6} = 0.$$

A equação acima possui soluções

$$r = \frac{\frac{35}{9} + i\sqrt{86531}}{2} \quad \text{e} \quad s = \frac{\frac{35}{9} - i\sqrt{86531}}{2}.$$

Observe que o módulo (norma) de r e s são iguais a $|r| = |s| = (\sqrt{1752559})/9$. Além disso, seja $\theta \in (0, 2\pi)$ o ângulo tal que $r = |r|e^{\theta i}$. Através de uma calculadora, podemos checar que θ é aproximadamente

$$\theta \approx 1.5576.$$

Como $s = \bar{r}$, também temos que $s = |s|e^{-\theta i}$.

Agora, temos que lembrar as mudanças de variáveis que fizemos até aqui. As soluções da equação de terceiro grau inicial são da forma $x = u + v$, onde u e v satisfazem as relações

$$\begin{cases} r = u^3 \\ s = v^3 \\ uv = -\frac{29}{9}. \end{cases}$$

Pelas duas primeiras equações, temos que

$$u \in \left\{ \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}},\ \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}+\frac{2\pi i}{3}},\ \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}+\frac{4\pi i}{3}} \right\}$$

e

$$v \in \left\{ \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}},\ \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}+\frac{2\pi i}{3}},\ \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}+\frac{4\pi i}{3}} \right\}$$

Porém, como uv é um número real, apenas 3 dentre essas 9 possibilidades para $x = u + v$ irão resultar em uma raíz da nossa equação inicial. Essas 3 possibilidades são

$$u = \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}},$$

$$u = \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}+\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}+\frac{4\pi i}{3}},$$

$$u = \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}+\frac{4\pi i}{3}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}+\frac{2\pi i}{3}}.$$

Para cada uma dessas três possibilidades, podemos chegar que $uv \in \mathbb{R}$. Observe que quando $u = \sqrt[3]{|r|}e^{\frac{\theta i}{3}}$ e $v = \sqrt[3]{|s|}e^{-\frac{\theta i}{3}}$, temos que $u + v \in \mathbb{R}$. Essa solução representa a única solução real da nossa equação. As outras duas soluções são complexas. Os valores numéricos das partes reais e imaginárias de cada solução podem ser obtidos com o auxílio de uma calculadora. Deixamos esse exercício a cargo do leitor.

3. Primeiro, escrevemos $x = y - 1$. Substituindo essa expressão na nossa equação, ficamos com

$$5y^4 - 30y^2 + 42 = 0.$$

Essa substituição foi escolhida justamente para que eliminássemos o termo cúbico da equação. Escrevendo $z = y^2$, nossa equação de quarto grau é transformada em uma equação de segundo grau, que é dada por

$$5z^2 - 30z + 42 = 0.$$

Resolver essa equação de segundo grau é bem mais fácil. Essa equação tem raízes

$$\frac{15 \pm \sqrt{15}}{5}.$$

Como $z = y^2$ e $x = y - 1$, segue que as 4 raízes da equação inicial são

$$-1 \pm \sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{15}}{5}}.$$

4. Seja $a + \sqrt{2}$ a raíz de P com $a \in \mathbb{Q}$. Veja que $P(a + \sqrt{2}) = 0$ se e somente se

$$\left(a + \sqrt{2}\right)^3 - 3\left(a + \sqrt{2}\right)^2 - a - 2\sqrt{2} = 0.$$

Por sua vez, a equação acima é equivalente a

$$(a^3 - 3a^2 + 5a - 6) + (3a^2 - 6a)\sqrt{2} = 0.$$

Para que a expressão acima seja igual a 0, devemos ter $3a^2 - 6a = 0$. Logo, ou $a = 0$, ou $a = 2$. Podemos verificar facilmente que $2 + \sqrt{2}$ é raíz de P e que $\sqrt{2}$ não é raíz de P. Logo, podemos fatorar P como

$$P(x) = (x - 2 - \sqrt{2}) \cdot (x^2 + mx + n).$$

Comparando coeficientes, segue que

$$\begin{cases} m = -1 + \sqrt{2} \\ n = \sqrt{2}/(2 + \sqrt{2}). \end{cases}$$

Agora, basta encontrarmos as raízes da equação

$$x^2 + (-1 + \sqrt{2})x + \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 0.$$

As raízes dessa equação são

$$\frac{1 - \sqrt{2} \pm i\sqrt{6\sqrt{2} - 7}}{2}.$$

Essas raízes também são raízes da nossa equação inicial.

5. Sejam a e b as duas raízes distintas dessa equação, com a sendo a raíz dupla. Então, temos que

$$x^3 + qx + r = (x - a)^2(x - b)$$

Comparando coeficientes, temos

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a^2 + 2ab = q \\ -a^2 b = r. \end{cases}$$

Substituindo $b = -2a$ na segunda equação, ficamos com $q = -3a^2$. Na terceira equação, ficamos com $r = -2a^3$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} 4q^3 + 27r^2 &= -4(3a^2)^3 + 27(2a^3)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

6. Suponha por absurdo que a equação $y^3 - 3y - 1 = 0$ tem uma solução racional p/q, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Assim, temos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0.$$

Essa equação é equivalente a

$$p^3 - 3pq^2 - q^3 = 0.$$

Por um lado, essa equação nos dá

$$p(p^2 - 3q^2) = q^3.$$

Como p divide o lado esquerdo da equação acima, p também deve dividir o lado direito. Mas, como $\text{mdc}(p, q) = 1$, segue que $|p| = 1$. Analogamente, temos que

$$q(q^2 + 3pq) = p^3.$$

Como q divide o lado esquerdo da equação acima, q também deve dividir o lado direito. Mas, como $\text{mdc}(p, q) = 1$, segue que $|q| = 1$. Assim, concluímos que a solução racional é igual a 1 ou -1.

Mas, nem 1 nem -1 são soluções racionais da equação $y^3 - 3y - 1 = 0$. Um absurdo! Portanto, a equação não possui soluções racionais, como queríamos provar.

7. Se p/q é uma raíz de P, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por q^n, segue que

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad (3)$$

Observe que no lado direito p divide todos os termos da forma $a_i p^i q^{n-i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como p também divide o lado esquerdo, que é igual a 0, concluímos que p também deve dividir $a_0 q^n$. Mas, como p e q não possuem fatores primos em comum, segue que p divide a_0.

Para provar que q divide a_n o raciocínio é análogo. Observe que no lado direito de (3) o número q divide todos os termos da forma $a_i p^{n-i} q^i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como q também divide o lado esquerdo, que é igual a 0, concluímos que q também deve dividir $a_n p^n$. Mas, como p e q não possuem fatores primos em comum, segue que q divide a_n.

8. Como a soma dos coeficientes desse polinômio é igual a 0, temos que 1 é uma raíz:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + (k+12)1^2 + (43-k)1 - 56 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $P(x)$ é divisível por $x - 1$. Através da divisão euclidiana, podemos escrever $P(x)$ na forma

$$P(x) = (x-1)(x^2 + (k+13)x + 56)$$

Logo, é suficiente encontrar todos os inteiros positivos k para os quais as soluções da equação

$$x^2 + (k+13)x + 56 = 0$$

sejam inteiras. Sejam a e b as raízes dessa equação. Logo, devemos ter

$$\begin{cases} a + b = -k - 13 \\ ab = 56. \end{cases}$$

Em particular, a e b devem dividir 56. Agora, veja que se $a \geq 0$, então a segunda equação do sistema nos dá $b \geq 0$. Mas, como k deve ser positivo, teríamos $0 \leq a + b \leq -k - 13 < 0$. Uma contradição! Portanto, ambas as raízes devem ser negativas.

Sem perda de generalidade, suponha $|a| < |b|$. Analisamos os divisores negativos de 56 caso a caso. Como $k = -a - b - 13$, temos

(a) $(a, b) = (-1, -56) \implies k = 44;$

(b) $(a, b) = (-2, -28) \implies k = 17;$

(c) $(a, b) = (-4, -14) \implies k = 5;$

(d) $(a, b) = (-7, -8) \implies k = 2$

Assim, concluímos que se $k \in \{2, 5, 17, 44\}$, então as raízes do polinômio P são inteiras. Além disso, esses são os únicos valores positivos de k para os quais isso acontece.

9. Substituindo $x = 3 - y - z$ na segunda equação do sistema, ficamos com

$$(3 - y - z)^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

Essa equação é equivalente a

$$9y^2 + 9z^2 - 3yz(y+z) - 27y - 27z + 18yz = -24.$$

Seja $t = y + z$. Assim, essa equação se transforma em

$$9y^2 + 9z^2 - 3yzt - 27t + 18yz = -24.$$

Por sua vez, essa equação é equivalente a

$$\begin{aligned} 9(z+y)^2 - 3yzt - 27t = -24 &\iff \\ 9t^2 - 3yzt - 27t = -24 &\iff \\ t(9t - 3yz - 27) = -24. & \end{aligned}$$

Como t é inteiro, segue da última equação que t deve dividir 24. Agora, testamos todas as possibilidades:

(a) $t = 1$: este caso nos dá

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ yz = 2. \end{cases}$$

Logo, não existe soluções inteiras.

(b) $t = -1$: este caso nos dá

$$\begin{cases} y + z = -1 \\ yz = -20. \end{cases}$$

Uma solução para esse sistema é $y = -5$ e $z = 4$. Como $x + y + z = 3$, segue que $x = 4$. É fácil ver que a tripla $(4, -5, 4)$ de fato satisfaz o sistema inicial, assim como todas as permutações desses valores.

(c) $t = -2$: este caso nos dá

$$\begin{cases} y + z = -2 \\ yz = -19. \end{cases}$$

Logo, não existe soluções inteiras.

(d) $t = 2$: este caso nos dá

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ yz = 1. \end{cases}$$

A solução para esse sistema é $y = z = 1$. Como $x + y + z = 3$, segue que $x = 1$. É fácil ver que a tripla $(1, 1, 1)$ de fato satisfaz o sistema inicial.

(e) t é um múltiplo de 3: primeiro, observe que

$$t(3t - yz - 9) = -8$$

Como 3 divide t mas 3 não divide 8, não existe soluções inteiras neste caso.

(f) t é um múltiplo de 4, mas não de 3: seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $t = 4k$. Logo, temos

$$k(12k - yz - 9) = -2$$

Como $4k$ deve dividir 24 e k não é múltiplo de 3, temos apenas 4 possibilidades para k: $-1, 1, -2$ e 2. Analisando cada um desses 4 casos, vemos que nenhum deles nos dão uma solução inteira para o sistema.

Concluímos que as únicas soluções para o nosso sistema são $(1,1,1)$ e $(4,4,-5)$, e suas permutações.

10.

Encontre todos os pares (a,b) de inteiros positivos que satisfazem a seguinte equação:

$$\frac{a^3+b^3}{ab+4} = 2020.$$

Suponha que $a^3 + b^3 = 2020(ab+4)$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $b \leq a$. Primeiro, observamos que a não pode ser igual a b. Suponha por absurdo que $a = b$. Então,

$$2a^3 = 2020(a^2+4) \iff a^2(2a - 2020) = 8080.$$

Agora, veja que $8080 = 2^4 \cdot 5 \cdot 101$. Como a^2 é quadrado perfeito, devemos ter $a^2 \in \{1, 4, 16\}$. Mas, da equação $2a^3 = 2020(a^2+4)$ também segue que 101 deve dividir a, uma contradição.

Agora, assumimos que $a > b$. Seja $d := \text{mdc}(a,b)$ o máximo divisor comum de a e b, e denote $s = a/d$ e $t = b/d$. Assim, temos

$$d^3s^3 + d^3t^3 - 2020d^2st = 8080. \tag{4}$$

Observe que d^2 deve dividir o lado direito da equação acima. Novamente, como $8080 = 2^4 \cdot 5 \cdot 101$ e d^2 é quadrado perfeito, devemos ter $d^2 \in \{1,4,16\}$, isto é $d \in \{1,2,4\}$.

Suponha que $d = 4$. Como

$$d^3s^3 + d^3t^3 = 4 \cdot 5 \cdot 101 \cdot (d^2st + 4),$$

devemos ter $16 | (16st + 4)$, uma contradição! Pois $16st + 4$ deixa resto 4 na divisão por 16. Logo, $d \neq 4$.

Agora, suponha por contradição que $d = 2$. Assim, temos

$$s^3 + t^3 = 2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot (st+1).$$

Essa equação é equivalente a

$$(s+t)(s^2 - st + t^2) = 2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot (st+1). \tag{5}$$

Note que 5 e 101 divide o lado esquerdo da última equação. Assim, para todo $p \in \{5, 101\}$ temos que $p \,|\, s+t$ ou $p \,|\, s^2 - st + t^2$. Como 5 e 101 são ambos primos que deixam resto 2 na por 3, podemos utilizar o lema dado antes deste exercício. Por esse lema, temos que se $5 \,|\, s^2 - st + t^2$, então $5 \,|\, s$ e $5 \,|\, t$. Isso seria uma contradição, pois s e t são primos entre si. Analogamente, não podemos ter $101 \,|\, s^2 - st + t^2$, caso contrário, teríamos $101 \,|\, s$ e $101 \,|\, t$. Assim, concluímos que $101 \cdot 5 \,|\, s + t$.

Como 2 divide o lado esquerdo de (5), temos que $2 \,|\, s+t$ ou $2 \,|\, s^2 - st + t^2$. Não é difícil ver que $2 \,|\, s^2 - st + t^2$ se e somente se $2 \,|\, s$ e $2 \,|\, t$. Como t e s não possuem fatores primos em comum, segue que $2 \,|\, s + t$. Assim, podemos escrever $s + t = 2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Substituindo essa expressão para $s + t$ em (5), ficamos com

$$k(s^2 - st + t^2) = st + 1.$$

No entanto, como $k \geq 1$, devemos ter

$$s^2 - st + t^2 \leq st + 1.$$

A última inequação é satisfeita se e somente se $(s-t)^2 \leq 1$. Assim, as únicas possibilidades são $s = t + 1$ ou $t = s + 1$. Em todo caso, teríamos que $2 \not| \, s + t$, uma contradição! Concluímos que $d \neq 2$.

Agora, só nos resta $d = 1$. Por (4), temos

$$s^3 + t^3 = 2020(st+4).$$

Assim,

$$(s+t)(s^2 - st + t^2) = 2020(st+4).$$

Utilizando raciocínio análogo ao anterior, concluímos que $2 \cdot 5 \cdot 101 \,|\, s + t$. Escrevendo $s + t = 1010k$, com $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$k(s^2 - st + t^2) = 2(st+4).$$

Observe que 2 divide o lado esquerdo da equação acima. Então, $2 \,|\, k$ ou $2 \,|\, s^2 - st + t^2$. Mas, já vimos que $2 \,|\, s^2 - st + t^2$ se e somente se $2 \,|\, s$ e $2 \,|\, t$. Como t e s não possuem fatores primos em comum, segue que $2 \,|\, k$. Como $k \geq 2$, segue que

$$\begin{aligned} s^2 - st + t^2 \leq st + 4 &\iff \\ (s-t)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Agora, vamos testar todos os casos. Se $|s - t| = 1$ então $s + t$ não é múltiplo de 2. Logo, devemos ter $|s - t| = 2$. Note que esse caso corresponde a $k = 2$. Sem perda de generalidade, suponha que $s > t$. Assim, temos

$$\begin{cases} s - t = 2 \\ s + t = 2020. \end{cases}$$

Do sistema acima segue que $s = 1011$ e $t = 1009$. Isso nos dá $a = 1011$ e $b = 1009$. Podemos verificar que de fato temos

$$\frac{a^3+b^3}{ab+4} = 2020.$$

Concluímos que essas são as únicas soluções da nossa equação inicial.

Material elaborado por Letícia Mattos.