Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 01

Motivação

Tópicos Adicionais

Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 01
Motivação

1 Exercícios Introdutórios

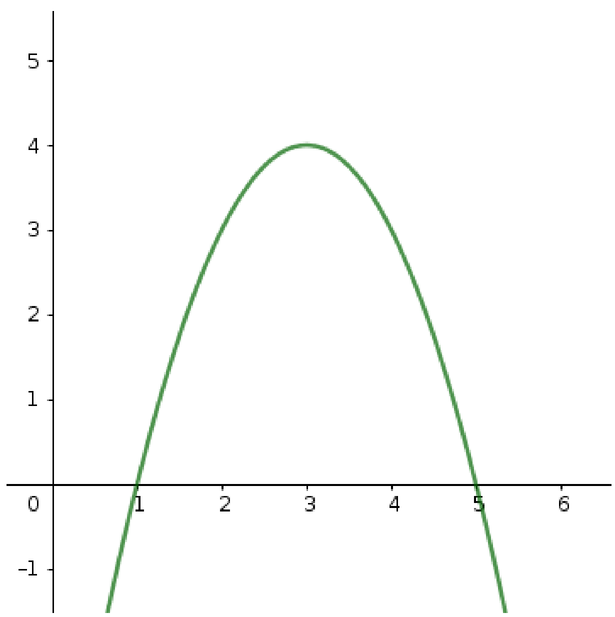
Exercício 1. Se n é um inteiro positivo, determine o menor inteiro que não é maior que as seguintes frações:

a) $\dfrac{3n+1}{n+2}$.

b) $\dfrac{8n+1}{2n+2}$.

c) $\dfrac{9n-4}{3n+1}$.

Exercício 2. Considere a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Determine o maior valor de d de modo que se $x \in (3-d, 3+d)$ então $f(x) > 2$.



Exercício 3. Seja m a inclinação da reta passando por $P = (3,4)$ que é tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ para $x \in [-5,5]$. Determine o valor de $-4m$.

Exercício 4. Seja m a inclinação da reta passando por $P = (6,8)$ que é tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{100-x^2}$ para $x \in [-10,10]$. Determine o valor de $-16m$.

Exercício 5. O ponto $(6,y)$ pertence a uma reta que passa pelo ponto $(3,4)$ e possui inclinação 5. Determine o valor de y.

2 Exercícios de Fixação

Nos próximos quatro exercícios, lembre que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercício 6. Determine o valor da soma $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 20^2$.

Exercício 7. Determine o valor da soma

$$3^2 + 6^2 + 9^2 + \ldots + 15^2.$$

Exercício 8. Determine o valor da soma $4^2 + 8^2 + 12^2 + \ldots + 24^2$.

Exercício 9. Determine o valor da soma $5^2 + 10^2 + 15^2 + \ldots + 40^2$.

Exercício 10. Considere o intervalo $[0,1]$ e sua partição em intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ com $x_i = \dfrac{i}{n}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Para cada um desses intervalos, calcule a área do retângulo com altura $f(x_i)$ e base $[x_i, x_{i+1}]$. Justifique a soma dessas áreas se aproxima de $1/3$ quando n cresce.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Nos próximos exercícios, lembre que:

$$\text{Se } q \in (-1,1) \text{ temos } 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Exercício 11. Determine o valor de $2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \ldots$.

Exercício 12. Determine o valor de $5 + \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{36} + \dfrac{5}{216} + \ldots$.

Exercício 13. Determine o valor de $8 + \dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{81} + \dfrac{8}{729} + \ldots$.

Exercício 14. Considere a sequência $a_n = 3 - \dfrac{1}{n+4}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para qual valor os termos da sequência se aproximam quando n cresce arbitrariamente?

Exercício 15. Considere a sequência $a_n = 6 - \dfrac{1}{n+8}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para qual valor os termos da sequência se aproximam quando n cresce arbitrariamente?

Exercício 16. Considere a sequência $a_n = 9 - \dfrac{1}{n+12}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para qual valor os termos da sequência se aproximam quando n cresce arbitrariamente?

Exercício 17. Considere a sequência $a_n = 12 - \dfrac{1}{n+16}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para qual valor os termos da sequência se aproximam quando n cresce arbitrariamente?

Exercício 18. Encontre o domínio $S \subset \mathbb{R}$ máximal de definição da função $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$.

Exercício 19. Considere a sequência $a_n = \dfrac{10n+7}{2n+3}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para qual valor os termos da sequência se aproximam quando n cresce arbitrariamente?

Exercício 20. Usando que

$$x^2 - x(a+b) + ab = (x-a)(x-b),$$

em cada item determine um valor de d de modo que se $|x-1| < d$ então $|f(x)| < 1/2$.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

b) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Respostas e Soluções.

1.

a)

$$\begin{aligned}\frac{3n+1}{n+2} &= \frac{3n+6-5}{n+2} \\ &= \frac{3n+6}{n+2} - \frac{5}{n+2} \\ &= 3 - \frac{5}{n+2}.\end{aligned}$$

Como $0 < \frac{5}{n+2} < 1$, segue que $2 < 3 - \frac{5}{n+2} < 3$ e o maior inteiro que não é maior que a fração é o 2.

b)

$$\begin{aligned}\frac{8n+1}{2n+2} &= \frac{8n+8-7}{2n+2} \\ &= \frac{8n+8}{2n+2} - \frac{7}{2n+4} \\ &= 4 - \frac{7}{2n+4}.\end{aligned}$$

Como $0 < \frac{7}{2n+4} < 1$, segue que $3 < 4 - \frac{7}{2n+4} < 4$ e o maior inteiro que não é maior que a fração é o 3.

c)

$$\begin{aligned}\frac{9n+4}{3n+1} &= \frac{9n+3+1}{3n+1} \\ &= \frac{9n+3}{3n+1} + \frac{1}{3n+1} \\ &= 3 + \frac{1}{3n+1}.\end{aligned}$$

Como $0 < \frac{1}{3n+1} < 1$, segue que $3 < 3 + \frac{1}{3n+1} < 4$ e o maior inteiro que não é maior que a fração é o 3.

2. Considere a reta $y = 2$. Para determinar os seus pontos de interseção com o gráfico, precisamos encontrar as soluções da equação $x^2 - 6x + 5 = 2$, ou seja, $x^2 - 6x + 3 = 0$. As raízes são $x_1 = \frac{6 - \sqrt{24}}{2} = 3 - \sqrt{6}$ e $x_2 = \frac{6 + \sqrt{24}}{2} = 3 + \sqrt{6}$. Como a função é crescente em $(-\infty, 3)$ e decrescente em $(3, \infty)$, segue que se $x \in (3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6})$ então $f(x) > 2$ e se $x \geq 3 + \sqrt{6}$ ou $x \leq 3 - \sqrt{6}$ então $f(x) \leq 2$. Assim, o máximo valor de d é $\sqrt{6}$.

3. A equação da reta por P com inclinação m é dada por $y = m(x-3) + 4$. O gráfico da função é um semicírculo de raio 5 centrado na origem O. Como a reta tangente é ortogonal ao raio OP que tem inclinação $\frac{4}{3}$ devemos ter $m = -\frac{3}{4}$. Portanto $-4m = 3$.

4. A equação da reta por P com inclinação m é dada por $y = m(x-6) + 8$. O gráfico da função é um semicírculo de raio 10 centrado na origem O. Como a reta tangente é ortogonal ao raio OP que tem inclinação $\frac{8}{6}$ devemos ter $m = -\frac{6}{8}$. Portanto $-16m = 12$.

5. Temos $\frac{y-4}{6-3} = 5$. Portanto $y = 19$.

6. A soma dada pode ser reescrita como $2^2(1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) = 1540$.

7. A soma dada pode ser reescrita como

$$3^2(1^2 + 2^2 + \ldots + 5^2) = 495.$$

8. A soma dada pode ser reescrita como

$$4^2(1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2) = 1456.$$

9. A soma dada pode ser reescrita como

$$5^2(1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2) = 5100.$$

10. A área do retângulo de base $[x_i, x_{i+1}]$ e altura $f(x_i)$ é $\frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2} = \frac{i^2}{n^3}$. A soma das áreas dos retângulos é

$$\begin{aligned}\frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} &= \\ \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} &= \\ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} &= \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} &= \\ \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Quando n cresce, a fração $1/n$ fica cada vez mais próxima de 0 e, consequentemente, $1 - 1/n$ e $2 - 1/n$ se aproximam de 1 e 2. Portanto, o produto se aproxima de

$$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

11. A expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) &= \\ 2 \cdot \frac{3}{2} &= \\ 3.\end{aligned}$$

12. A expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}5 \cdot \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) &= \\ 5 \cdot \frac{6}{5} &= \\ 6.\end{aligned}$$

13. A expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}8 \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \ldots\right) &= \\ 8 \cdot \frac{9}{8} &= \\ 9.\end{aligned}$$

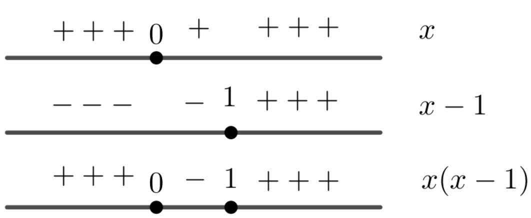
14. Quando n cresce arbitrariamente a fração $\dfrac{1}{n+4}$ se aproxima de zero. Portanto os termos da sequência se aproximam de 3.

15. Quando n cresce arbitrariamente a fração $\dfrac{1}{n+8}$ se aproxima de zero. Portanto os termos da sequência se aproximam de 6.

16. Quando n cresce arbitrariamente a fração $\dfrac{1}{n+12}$ se aproxima de zero. Portanto os termos da sequência se aproximam de 9.

17. Quando n cresce arbitrariamente a fração $\dfrac{1}{n+16}$ se aproxima de zero. Portanto os termos da sequência se aproximam de 12.

18. Para que $\dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$ seja um número real, é necessário e suficiente que $x(x-1) > 0$. Então x e $x-1$ devem possuir os mesmos sinais.



Temos

(a) $x > 0$ e $x-1 > 0$ se $x > 1$

(b) $x < 0$ e $x-1 < 0$ se $x < 0$

Portanto, o domínio maximal é $S = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

19. Note que

$$\begin{aligned}\frac{10n+7}{2n+3} &= \frac{5(2n+3)-8}{2n+3}\\ &= \frac{5(2n+3)}{2n+3} - \frac{8}{2n+3}\\ &= 5 - 8\cdot\frac{1}{2n+3}.\end{aligned}$$

Quando n cresce, a fração $\dfrac{1}{2n+3}$ se aproxima de zero. Portanto, a fração dada se aproxima de $5 - 8\cdot 0 = 5$.

20.

a) Note que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Assim, $|f(x)| = |x-1||x-3|$. Se $|x-1| < d$, então

$$\begin{aligned}|x-3| &= |x-1-2|\\ &\leq |x-1| + |-2|\\ &\leq d+2.\end{aligned}$$

Portanto, se $d < 1$, $|x-3| < 1+2 = 3$. Além disso, se $d < \dfrac{1}{3\cdot 2}$ temos

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |x-1||x-3|\\ &< d\cdot(d+2)\\ &< \frac{1}{3\cdot 2}\cdot 3\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) Note que $x^2 - 6x + 5 = (x-2)(x-3)$. Assim, $|f(x)| = |x-2||x-3|$. Se $|x-2| < d$, então

$$\begin{aligned}|x-3| &= |x-2-1|\\ &\leq |x-2| + |-1|\\ &\leq d+1.\end{aligned}$$

Portanto, se $d < 1$, $|x-3| < 1+1 = 2$. Além disso, se $d < \dfrac{1}{2\cdot 2}$ temos

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |x-1||x-3|\\ &< d\cdot(d+1)\\ &< \frac{1}{2\cdot 2}\cdot 2\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Note que $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Assim, $|f(x)| = |x-1||x+3|$. Se $|x-1| < d$, então

$$\begin{aligned}|x+3| &= |x-1-4|\\ &\leq |x-1| + |-4|\\ &\leq d+4.\end{aligned}$$

Portanto, se $d < 1$, temos $|x+3| < 1+4 = 5$. Além disso, se $d < \dfrac{1}{5\cdot 2}$ temos

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |x-1||x-3|\\ &< d\cdot(d+4)\\ &< \frac{1}{5\cdot 2}\cdot 5\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com