

# Módulo de Equações e Sistemas de Equações Fracionárias

## Sistema de Equações Fracionárias.

8<sup>o</sup> ano/7<sup>a</sup> série E.F.



Equações e Sistemas de Equações Fracionárias  
Sistema de Equações Fracionárias.

## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + 3y = 6 \\ \frac{2}{x} - 5y = 1. \end{cases}$$

**Exercício 2.** Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{x-y} = -2. \end{cases}$$

**Exercício 3.** Encontre todos os pares  $(x, y)$  tais que

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{7}{2} \\ \frac{6}{x} + \frac{4}{y} = 9. \end{cases}$$

**Exercício 4.** Determine as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{12}{y} - \frac{3}{x} = 5 \end{cases}$$

**Exercício 5.** Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{7}{y} = -18 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -7. \end{cases}$$

**Exercício 6.** Encontre todos os pares ordenados  $(x, y)$  que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - 3 = \frac{2}{y} \\ 2x - 9y = -8. \end{cases}$$

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 7.** Encontre as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 11 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 13 \end{cases}$$

**Exercício 8.** Se  $x$  e  $y$  são números não nulos tais que  $x = 1 + \frac{1}{y}$  e  $y = 1 + \frac{1}{x}$ , então  $y$  é igual à:

a)  $x - 1$     b)  $1 - x$     c)  $1 + x$     d)  $-x$     e)  $x$ .

**Exercício 9.** Calcule  $\frac{x}{y}$  se

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

**Exercício 10.** Encontre todos os pares ordenados  $(x, y)$  tais que

$$\begin{cases} \frac{3x - 4y}{xy} = -8 \\ \frac{2x + 7y}{xy} = 43 \end{cases}$$

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 11.** Encontre soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

**Exercício 12.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 2 \\ \frac{xyz}{y+z} = \frac{6}{5} \\ \frac{xyz}{z+x} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

**Exercício 13.** Dado que todos os números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são positivos, encontre as soluções do sis-

tema de equações abaixo nas incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_2 x_3 \dots x_n}{x_1} = a_1 \\ \frac{x_1 x_3 \dots x_n}{x_2} = a_2 \\ \dots \\ \frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}{x_n} = a_n \end{array} \right.$$

**Exercício 14.** Supondo que  $a, b, c \neq 0$  e que o sistema abaixo tem solução, determine o valor de  $x$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{xy}{x+y} = a \\ \frac{xz}{x+z} = b \\ \frac{yz}{y+z} = c. \end{array} \right.$$

**Exercício 15.** Resolva o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2a^2}{1+a^2} = b \\ \frac{2b^2}{1+b^2} = c \\ \frac{2c^2}{1+c^2} = a \end{array} \right.$$

**Exercício 16.** Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 quilômetros de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor  $km/h$ ?

- a) 2    b) 5/2    c) 3    d) 7/2    e) 4.

Dica: Quando o homem nada no sentido da correnteza, a sua velocidade relativa deve ser somada com a do rio e, quando nada no sentido contrário ao da correnteza, a velocidade do rio deve ser subtraída de sua velocidade.

## Respostas e Soluções.

1. Seja  $a = \frac{1}{x}$ . Então o sistema é equivalente à

$$\begin{cases} a + 3y = 6 \\ 2a - 5y = 1. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do dobro da primeira, obtemos  $11y = 11$ , ou seja,  $y = 1$ . Substituindo tal valor na primeira equação, encontramos  $a = 3$ . Consequentemente  $(x, y) = (1/3, 1)$ .

2. (Extraído Videoaula) Uma condição necessária para que o sistema dado exista é que os denominadores sejam diferentes de zero, ou seja,  $x \neq y$  e  $x \neq -y$ . Multiplicando a primeira equação por  $3(x + y)$  e a segunda por  $x - y$ , obtemos

$$\begin{aligned} 3x &= x + y \\ 4 &= -2(x - y) \end{aligned}$$

Pela primeira equação,  $y = 2x$ . Substituindo este valor na segunda equação, obtemos  $4 = 2x$ , ou seja,  $x = 2$  e, finalmente,  $y = 4$ .

3. Uma condição necessária para que as frações envolvidas existam é que tanto  $x$  quanto  $y$  sejam não nulos. Somando o dobro da primeira equação com a segunda, obtemos  $\frac{12}{x} = 2$ , ou seja,  $x = 6$ . Substituindo esse valor na primeira equação, encontramos  $y = 1/2$ . Portanto,  $(x, y) = (6, 1/2)$ .

4. Multiplicando a primeira equação por 3 e somando com a segunda obtemos  $\frac{15}{y} = 8$ , ou seja,  $y = 15/8$ . Substituindo esse valor na primeira equação, encontramos  $x = 15/7$ .

5. (Extraído Videoaula) Se  $a = \frac{1}{x}$  e  $b = \frac{1}{y}$ , o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} 4a + 7b = -18 \\ a + 2b = -7. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 4 e subtraindo-a da primeira, obtemos  $-b = 10$ . Portanto,  $b = -10$  e  $a = -7 - 2b = 13$ . Finalmente, podemos concluir que  $x = \frac{1}{13}$  e  $y = -\frac{1}{10}$ .

6. Uma condição necessária para que as frações existam é que  $y \neq 0$ . Multiplicando a primeira equação por  $2y$ , obtemos  $2x - 6y = 4$ . Subtraindo a equação encontrada da segunda equação do sistema, temos  $-3y = -12$ , ou seja,  $y = 4$ . Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos  $x = 14$ .

7. Somando todas as equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} &= 36 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 9 \end{aligned}$$

Subtraindo a última equação de todas as equações do sistema, obtemos:

$$\frac{1}{x} = 2, \frac{1}{y} = 3 \text{ e } \frac{1}{z} = 4.$$

Consequentemente,  $(x, y, z) = (1/2, 1/3, 1/4)$ .

8. (Extraído da AIME 1968) Das equações dadas, temos:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{1}{y} \\ y - 1 &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Portanto,  $y(x - 1) = 1 = x(y - 1)$  e, consequentemente,

$$\begin{aligned} xy - y &= xy - x \\ x &= y \end{aligned}$$

A resposta correta está na letra E.

9. (Extraída da AMC) Seja  $p = \frac{x}{y}$ . Assim  $x = py$  e o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} py + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{py} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por  $p$ , obtemos  $py + \frac{1}{y} = \frac{p}{4}$ . Por comparação, podemos concluir que  $\frac{p}{4} = 4$  e, consequentemente,  $p = 16$ .

10. Sejam  $a = \frac{1}{x}$  e  $b = \frac{1}{y}$ . Assim, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} -4a + 3b = -8 \\ 7a + 2b = 43 \end{cases}$$

Subtraindo o dobro da primeira equação do o triplo da segunda, obtemos  $29a = 145$ , ou seja,  $a = 5$ . Substituindo o valor de  $a$  na primeira equação, obtemos  $b = 4$ . Portanto,  $(x, y) = (1/5, 1/4)$ .

11. Multiplicando as equações do sistema anterior por  $xy$ , obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy \\ 3(x+y) = xy. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x+y)((x+y)^2 - 3xy), \end{aligned}$$

é conveniente introduzir as variáveis auxiliares  $a = x + y$  e  $b = xy$ . Assim o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b) = 12b \\ 3a = b. \end{cases}$$

Substituindo o valor de  $b$  da segunda na primeira equação, obtemos  $a(a^2 - 9a) = 36a$ . Devemos ter  $a \neq 0$ , pois caso contrário teríamos também  $b = 0$  e algum dos denominadores iniciais seria nulo, o que é um absurdo. Podemos então cancelá-lo obtendo a equação do segundo grau

$$a^2 - 9a - 36 = 0.$$

As suas raízes são  $a = 12$  e  $a = -3$ . Para cada um desses valores, temos um novo sistema nas incógnitas iniciais:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 36. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -9. \end{cases}$$

No primeiro, caso as soluções são  $(x, y) = (6, 6)$  e, no segundo caso,  $(x, y) = (\frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1), \frac{3}{2}(-\sqrt{5} - 1))$  ou  $(x, y) = (\frac{3}{2}(-\sqrt{5} - 1), \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1))$ . É imediato verificar que as três soluções encontradas satisfazem o sistema dado.

12. Dividindo a primeira equação pela segunda e pela terceira, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} \frac{y+z}{x+y} = \frac{5}{3} \\ \frac{z+x}{x+y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Multiplicando ambas as equações por  $x + y$ , temos

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

Por comparação,  $5x + 2y = x + 4y$ , ou seja,  $y = 2x$ . Substituindo na primeira equação, encontramos  $3z = 5x + 2y = 9x$ , ou seja,  $z = 3x$ . Assim

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{xyz}{x+y} \\ &= \frac{6x^3}{3x} \\ &= 2x^2. \end{aligned}$$

Daí,  $x = \pm 1$  e  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  ou  $(x, y, z) = (-1, -2, -3)$ . É imediato verificar que os valores encontrados são soluções do sistema.

13. Multiplicando todas as equações, obtemos

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-2} = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Daí,

$$x_1 x_2 \dots x_n = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n} = S.$$

Multiplicando a  $k$ -ésima equação por  $x_k^2$ , temos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n}{x_k} \\ a_k x_k^2 &= x_1 x_2 \dots x_n \\ x_k &= \sqrt{\frac{S}{a_k}}. \end{aligned}$$

Portanto, a única solução do sistema é

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \sqrt{\frac{S}{a_1}}, \sqrt{\frac{S}{a_2}}, \dots, \sqrt{\frac{S}{a_n}} \right),$$

com  $S = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \dots a_n}$ .

14. O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{b} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{c}. \end{cases}$$

Somando as três equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{ab + bc + ac}{2abc}. \end{aligned}$$

Somando agora as duas primeiras equações do sistema

anterior e subtraindo o valor da última equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{ab + bc + ac}{2abc} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{ab + bc + ac}{2abc} \\ &= \frac{a + b}{ab} - \frac{ab + bc + ac}{2abc} \\ &= \frac{2ac + 2bc - ab - bc - ac}{2abc} \\ &= \frac{ab + bc - ac}{2abc}. \end{aligned}$$

Portando,  $x = \frac{2abc}{ab + bc - ac}$ .

15. (Extraído da Olimpíada Russa) O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{a^2 + 1}{a^2} - \frac{2}{b} = 0 \\ \frac{b^2 + 1}{b^2} - \frac{2}{c} = 0 \\ \frac{c^2 + 1}{c^2} - \frac{2}{a} = 0 \end{cases}$$

Somando essas equações, obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 = 0.$$

Como um quadrado de um real sempre é não negativo, a única maneira para que a soma deles seja nula é:

$$1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c},$$

ou seja,  $a = b = c = 1$ .

16. Sejam  $c$  e  $v$  as velocidades da correnteza do rio e do homem. Os dados do enunciado podem ser traduzidos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{15}{v + c} = \frac{15}{v - c} - 5 \\ \frac{15}{2v + c} = \frac{15}{2v - c} - 1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $(v^2 - c^2)$  e a segunda por  $(4v^2 - c^2)$ , obtemos

$$\begin{cases} 15(v - c) = 15(v + c) - 5(v^2 - c^2) \\ 15(2v - c) = 15(2v + c) - (4v^2 - c^2) \end{cases}$$

Por comparação, segue que  $5(v^2 - c^2) = (4v^2 - c^2)$ , ou seja,  $v^2 = 4c^2$ . Como as velocidades são positivas,  $v = 2c$ . Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações do sistema, obtemos  $c = 2$  e, conseqüentemente,  $v = 4$ . Resposta letra A.