Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Funções e Geometria

Material elaborado por Letícia Mattos.

Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2
Funções e Geometria

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ uma função polinomial, com $a \neq 0$. Mostre que um dos itens a seguir deve ser verdadeiro.

(a) P possui 3 raízes reais distintas;

(b) P possui 3 raízes reais, sendo uma com multiplicidade 2 e outra com multiplicidade 1;

(c) P possui apenas uma raíz real.

Para cada um dos itens acima, dê um exemplo de polinômio de terceiro grau que o satisfaça.

Exercício 2. Seja $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ uma função polinomial. Suponha que c seja uma constante real positiva e que $x_1 < x_2 < x_3$. Prove que

(a) $P(x) < 0$, para todo $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$;

(b) $P(x) > 0$, para todo $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$;

(c) Existem $a, b \in [x_1, x_3]$ para os quais

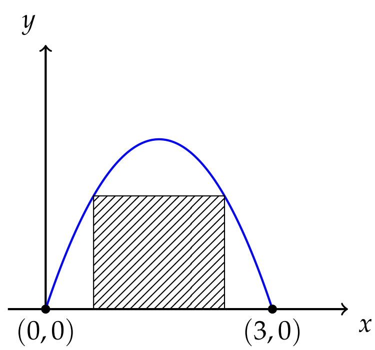
$$P(a) \leq P(x) \leq P(b),$$

para todo $x \in [x_1, x_3]$. Além disso, esses valores são únicos.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x(x-3)(2x-3)$. Encontre o valor máximo de f quando restrita ao domínio $(-\infty, 3]$. Esse valor máximo é atingido em quais pontos do intervalo $(-\infty, 3]$?
Dica: some uma constante a f e utilize os exercícios anteriores.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Seja $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x(3-x)$. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que está contido na região abaixo do gráfico de f e acima do eixo x, e cujo um dos lados está apoiado sobre o eixo x.



Exercício 5. Qual é a maior área possível para um triângulo contido em um círculo de raio 1?

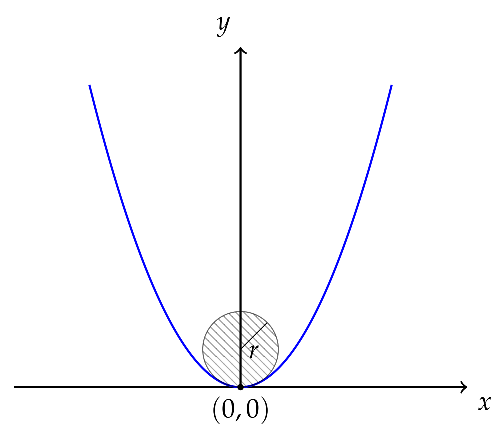
Exercício 6. Mostre que, dentre todos os triângulos cujo perímetro é igual a s e cujo um dos lados tem tamanho a, a área é maximizada quando os outros dois lados têm o mesmo tamanho. Dica: use a fórmula de Heron.

Exercício 7. Seja P uma partícula em $\mathbb{R}^2$ que se move em velocidade constante sobre a circunferência unitária centrada na origem. Suponha que a posição inicial da partícula é $(1,0)$ e que ela leva 2π segundos para realizar uma volta completa na circunferência. Encontre as funções que fornecem a ordenada e a abscissa de P em função do tempo em segundos.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Seja $C : x^2 + y^2 = 1$ a circunferência unitária centrada na origem. Para cada ponto em C, encontre a inclinação da reta tangente à circunferência que passa por aquele ponto.

Exercício 9. Um círculo de raio r é lançado dentro da parábola de equação $y(x) = x^2$. Se r for muito grande, o círculo não encostará o fundo da parábola. Por outro lado, se r for suficientemente pequeno, o círculo encostará o vértice da parábola. Encontre o maior valor de r para o qual o círculo de raio r toque o vértice da parábola.



Exercício 10. Um quadrado de lado 1, com vértices nos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$, rola sobre o eixo X, sem deslizar. O ponto que, no início do movimento, está na origem, descreve uma curva, chamada *cyclogon*. Encontre as coordenadas de um ponto sobre o essa curva, dependendo de um parâmetro.

Respostas e Soluções.

1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a > 0$, uma vez que P e $-P$ possuem as mesmas raízes.

Primeiro, afirmamos que P possui pelo menos uma raiz real. De fato, para x positivo e suficientemente grande, temos $\dfrac{ax^3}{2} > |bx^2 + cx + d|$. Em particular,

$$P(-x) < -ax^3/2 < 0 \qquad \text{e} \qquad 0 < ax^3/2 < P(x).$$

Como P é uma função contínua, segue que P deve assumir todos os valores no intervalo $(-ax^3/2, ax^3/2)$. Em particular, $P(y) = 0$ para algum ponto y do domínio.

Denote por x_1 uma das raízes de P. Então, P pode ser expresso da forma

$$P(x) = (x - x_1)(px^2 + qx + r),$$

com $p, q, r \in \mathbb{R}$. Seja $Q(x) = px^2 + qx + r$. Agora, temos algumas possibilidades, e cada delas corresponderá a um dos itens (a), (b) ou (c):

- Q possui duas raízes reais distintas. Se elas forem diferentes de x_1, isso corresponde ao item (a); caso contrário, corresponde ao item (b).
- Q possui uma raiz real com multiplicidade 2. Se ela for diferente de x_1, isso corresponde ao item (b); caso contrário, corresponde ao item (c).
- Q não possui raízes reais. Nesse caso, x_1 é a única raiz real de P, o que corresponde ao item (c).

Agora, vamos aos exemplos:

(a) $P(x) = x(x-1)(x-2)$;

(b) $P(x) = (x-1)^2(x-2)$;

(c) $P_1(x) = x^3$ e $P_2(x) = (x-1)(x^2+x+1)$.

2.

(a) Se $x \in (-\infty, x_1)$, então

$$x - x_3 < x - x_2 < x - x_1 < 0.$$

Isso implica que o produto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ é negativo. Logo, $P(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, x_1)$.

Se $x \in (x_2, x_3)$, então

$$x - x_3 < 0 \qquad \text{e} \qquad x - x_1 > x - x_2 > 0.$$

Portanto, o produto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ é negativo. Isso nos dá $P(x) < 0$ para todo $x \in (x_2, x_3)$.

(b) Se $x \in (x_3, +\infty)$, então

$$0 < x - x_3 < x - x_2 < x - x_1.$$

Isso implica que o produto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ é positivo. Logo, $P(x) > 0$ para todo $x \in (x_3, +\infty)$.

Se $x \in (x_1, x_2)$, então

$$x - x_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad x - x_3 < x - x_2 < 0.$$

Portanto, o produto $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ é positivo. Isso nos dá $P(x) > 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$.

(c) Primeiro, veja que P é limitada no intervalo $[x_1, x_3]$. Para ver isso, note que cada uma das parcelas $x - x_1$, $x - x_2$ e $x - x_3$ é limitada nesse intervalo, inferior e superiormente. Como P é uma função contínua, deve assumir um valor máximo e um valor mínimo no intervalo $[x_1, x_3]$ (esse fato pode ser visto de maneira intuitiva; para uma prova formal, veja o Teorema de Weierstrass).

Agora, suponha por absurdo que existam dois pontos distintos m_1, m_2 no intervalo $[x_1, x_3]$ tais que

$$P(x) \le P(m_1) \qquad \text{e} \qquad P(x) \le P(m_2),$$

para todo $x \in [x_1, x_3]$. Em particular, devemos ter $P(m_1) = P(m_2)$. Observe também que m_1 e m_2 pertencem ao intervalo (x_1, x_3), uma vez que $P(x) > 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$, mas $P(x_1) = P(x_3) = 0$. Como P é uma função contínua, isso implica que devem existir pelo menos 4 números reais r_1, r_2, r_3 e r_4 tais que

$$P(r_1) = P(r_2) = P(r_3) = P(r_4).$$

Logo, a função dada por $Q(x) = P(x) - P(r_1)$ possui 4 raízes reais. Isso é uma contradição! A função Q é um polinômio de terceiro grau e, portanto, deve possuir no máximo 3 raízes reais.

Um raciocínio análogo pode ser aplicado para concluir que existe apenas um valor $a \in [x_1, x_3]$ para o qual $f(a) \le f(x)$, para todo $x \in [x_1, x_3]$.

3. Seja $f(a)$ o valor máximo de f no intervalo $[0, 3]$. Pelo exercício anterior, temos

$$\{x \in [0,3] : f(x) = f(a)\} = \{a\} \tag{1}$$

Utilizaremos uma função auxiliar g para encontrar o valor $f(a)$:

$$g(x) := f(x) - f(a).$$

Observe que o gráfico de g é o mesmo que o de f, porém transladado por uma constante.

Afirmação 1 O gráfico de g toca o eixo horizontal em apenas dois pontos. Isto é, g possui apenas duas raízes reais distintas.

prova. Primeiro, note que $f(a)$ é o valor máximo de f no intervalo $[0, 3]$, e

$$f(x) \le f(a) \text{ para todo } x \le 0,$$

já que $f\big((-\infty, 0]\big) = (-\infty, 0]$. Por (1), segue que

$$\{x \le 3 : g(x) = 0\} = \{a\}.$$

Concluímos que g tem apenas uma raíz real no intervalo $(-\infty, 3]$.

Agora, vamos provar que g deve possuir apenas uma raíz real no intervalo $(3, +\infty)$. Veja que $f\big((3, +\infty)\big) = (0, +\infty)$. Isso implica que $g\big((3, +\infty)\big) = (-f(a), +\infty)$. Logo, g possui *pelo menos* uma raíz real maior do que 3. No entanto, como $x(x-3)$ e $2x - 3$ são funções crescentes no intervalo $(3, +\infty)$, temos que f também é crescente nesse mesmo intervalo. Disso, segue que g também é crescente em $(3, +\infty)$ e, assim, só pode ter uma única raíz real nesse intervalo. Isso prova nossa afirmação. ■

Agora que sabemos que g possui duas raízes reais distintas, podemos fatorar g da seguinte forma:

$$g(x) = m(x - r_1)^2(x - r_2) = f(x) - f(a),$$

onde $m, r_1, r2 \in \mathbb{R}$. Igualando os coeficientes dos polinômios

$$g(x) = m\Big(x^3 - (2r_1 + r_2)x^2 + (r_1 + 2r_2)r_1 x - r_1^2 r_2\Big)$$

e

$$g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 9x - f(a),$$

temos

$$\begin{cases} m = 2 \\ 2(2r_1 + r_2) = 9 \\ 2(r_1 + 2r_2)r_1 = 9 \\ 2r_1^2 r_2 = f(a). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear acima, descobrimos que $r_1 = (3 \pm \sqrt{3})/2$ e $r_2 = (3 \mp 2\sqrt{3})/2$. Por um lado, a expressão $r_1^2 r_2$ é negativa se $r_1 = (3 + \sqrt{3})/2$ e $r_2 = (3 - 2\sqrt{3})/2$; por outro lado, $f(a) > 0$. Logo, a única opção que nos resta é

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ r_2 = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Portanto, o valor máximo de f é dado por

$$2\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, vamos encontrar o valor $a \leq 3$ para o qual $f(a) = 3\sqrt{3}/2$. Como $g(a) = 0$, devemos ter $a = r_1$ ou $a = r_2$. Mas, como $r_2 > 3$, segue que $a = r_1 = (3 - \sqrt{3})/2$.

4. Observe que o vértice da parábola tem abscissa $3/2$. Seja $x \in [0, 3/2]$. Uma vez que a parábola é simétrica em torno da reta de equação $x = 3/2$, segue que o retângulo de maior área que possui o ponto $(x, f(x))$ e as propriedades desejadas contém os pontos $(x, 0), (x, f(x)), (3 - x, f(x))$ e $(3 - x, 0)$. Note que esse retângulo possui área igual a $f(x)(3 - 2x)$. Assim, nosso problema se resume a encontrar o valor $x \in [0, 3/2]$ que maximiza a função A dada por

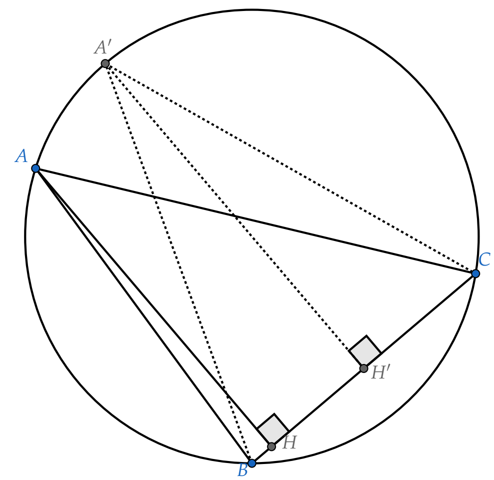
$$A(x) := f(x)(3 - 2x) = x(x - 3)(2x - 3).$$

Isso implica que x deve ser um ponto do domínio que maximiza A. Pelo exercício anterior, esse ponto é igual a $(3 - \sqrt{3})/2$ e

$$A\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Isso nos dá um retângulo de base $\sqrt{3}$ e altura $3/2$.

5. Vamos mostrar que o triângulo equilátero possui a maior área dentre todos os triângulos contido em um círculo de raio 1. Primeiro, veja que podemos nos restrigir aos triângulos que possuem os três vértices sobre a circunferência. Seja ΔABC um triângulo qualquer, como na figura abaixo, e suponha que ΔABC possui a maior área.



Seja H' o ponto médio do segmento BC e A' um ponto sob a circunferência tal que $\angle A'H'C = \pi/2$. Note que $|A'B| = |A'C|$. Se $A \neq A'$, então a área do triângulo $\Delta A'BC$ é maior que a área do triângulo ΔABC, uma vez que a altura AH tem tamanho menor que a altura $A'H'$. Isso seria uma contradição, uma vez que estamos supondo que ΔABC é um triângulo que tem a maior área possível. Disso, concluímos que o triângulo ΔABC deve ser isósceles: $|AB| = |BC|$. Aplicando o mesmo racíocínio para os segmentos AB e BC, concluímos que devemos ter $|BC| = |AB|$. Logo, o triângulo de maior área é o triângulo equilátero com vértices sobre a circunferência.

Para calcular a área do triângulo equilátero inscrito na circunferência, veja que ele é formado por 3 triângulos isósceles de ângulo central igual a $2\pi/3$, e cujos lados congruentes medem 1. A área de cada um desses triângulos é igual a

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot sen(2\pi/3)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, a área do triângulo equilátero é igual a $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

6. Seja $f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ uma função dada por

$$f(a, b, c) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

onde $s = (a + b + c)/2$. Pela fórmula de Heron, note que um triângulo de lados a, b e c tem área dada por $f(a, b, c)$. Assim, gostaríamos de maximizar a função f quando a e s são fixos e os lados a, bec definem um triângulo. Quando s e a estão fixos, podemos tratar o produto $s(s - a)$ como uma constante. Então, é suficiente maximizar o produto $(s - b)(s - c)$. Agora, note que

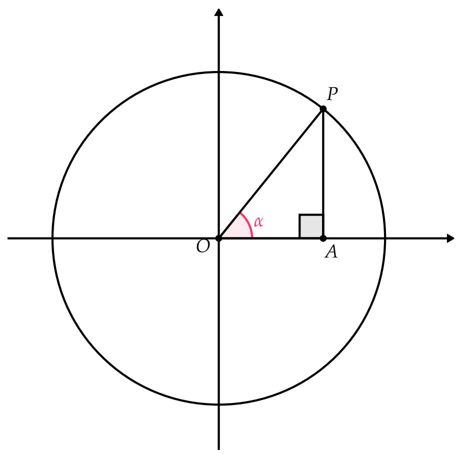
$$s^2 - (b + c)s + bc = s^2 - (2s - a)s + bc$$

Como $s^2 - (2s-a)s$ é uma constante quando a e s estão fixos, segue que é suficiente maximizar o produto bc, sabendo que $b + c = 2s - a$. Assim, temos

$$\begin{aligned} bc &= (2s - a - b)b \\ &= -b^2 + (2s-a)b. \end{aligned}$$

A expressão acima é maximizada quando $b = (2s-a)/2$. Logo, também devemos ter $c = (2s-a)/2$ e, portanto, $b = c$. Note que essa medidas definem um triângulo isósceles, uma vez que a desigualdade triangular é satisfeita.

7. Veja que, após α segundos, a partícula P encontra-se como na figura abaixo.



Note que $|AP|/|OP| = sen\,\alpha$ e $|OA|/|OP| = \cos\alpha$. Assim, após α segundos, a partícula P encontra-se no ponto de coordenadas $(sen\,\alpha, \cos\alpha)$.

8. Seja O a origem do plano cartesiano e $P = (a,b)$ um ponto sobre a circunferência. Seja s a reta que contém os pontos O e P, e r à reta tangente à circunferência no ponto P. Observe que $s \perp r$. Vamos calcular o coeficiente angular da reta s e usar a relação entre coeficientes angulares de retas perpendiculares para encontrar o coeficiente angular de r.

Por enquanto, suponha que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Veja que a equação linear que define a reta s é dada por $y = bx/a$. Isso implica que a reta r deve ter coeficiente angular igual a $-a/b$. Assim, segue que o coeficiente angular de r é igual a

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{ se } b < 0; \\ -\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{ se } b > 0. \end{cases}$$

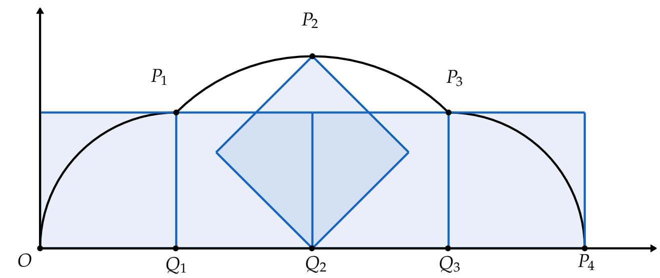
Note que as relações acima ainda são mantidas quando $a = 0$. Quando $b = 0$, P é igual a $(1,0)$ ou $(-1,0)$. No primeiro caso, a reta tem equação $x = 1$ e, no segundo caso, a reta tem equação $x = -1$. Em ambos os casos, o coeficiente angular é $+\infty$.

9. Seja C a circunferência de raio r que estamos procurando. Observe que C deve ser centrada no ponto $(0,r)$. Para encontrar o valor de r, note que pontos de interseção entre C e a parábola devem satisfazer o sistema

$$\begin{aligned} x^2 + (y-r)^2 &= r^2 \\ y &= x^2. \end{aligned}$$

Veja que, se (x,y) é uma solução para o sistema acima, então $x^2(x^2 + 1 - 2r) = 0$. Mas, a circunferência que procuramos é aquela de maior raio para o qual o sistema acima possui apenas a solução $x = y = 0$. Disso, concluímos que $r = 1/2$, uma vez que a equação $x^2 + 1 - 2r = 0$ admite apenas a solução $x = 0$ se, e somente se $r = 1/2$.

10. Primeiro, vamos analisar o movimento do ponto no intervalo $[0,4]$. Inicialmente, vamos analisar esse intervalo em três partes, cada uma correspondendo a uma 'fase' do movimento, como mostra a figura a seguir.



Veja que a trajetória da partícula no intervalo $[0,1]$ corresponde a quarta parte de uma circunferência cujo raio é 1. Como a equação de uma circunferência de raio 1 e centro $(1,0)$ é dada por $y^2 + (x-1)^2 = 1$, temos que a expressão que define o movimento no intervalo $[0,1]$ é dada por

$$y = \sqrt{1-(x-1)^2}, \tag{2}$$

onde $x \in [0,1]$.

Agora, vamos analisar o movimento no intervalo $[1,3]$. Observe que a trajetória da partícula nesse intervalo corresponde a um arco de circunferência. Na figura, veja que $\angle P_1Q_2P_3 = \pi/2$ e que a distância de $Q_2 = (2,0)$ até qualquer ponto desse arco é igual a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Segue que a expressão que define o movimento da partícula no intervalo $[1,3]$ é dada por

$$y = \sqrt{2-(x-2)^2}, \tag{3}$$

onde $x \in [1,3]$. Agora, vamos analisar o movimento no intervalo $[3,4]$. Veja que a trajetória da partícula nesse intervalo corresponde a quarta parte de uma circunferência cujo raio é 1. Segue que a expressão que define o movimento da partícula no intervalo $[1,3]$ é dada por

$$y = \sqrt{1-(x-3)^2}, \tag{4}$$

onde $x \in [3,4]$.

Para todo $x \in \mathbb{R}_+$, defina $\{x\}_4 := x - 4 \cdot \left\lfloor \dfrac{x}{4} \right\rfloor$, onde $\lfloor a \rfloor$ denota o menor inteiro mais próximo de a. Juntando as equações (2), (3) e (4), e extendendo o argumento para $\mathbb{R}_+$, temos que a função que nos dá a trajetória do movimento é dada por

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(\{x\}_4 - 1)^2}, \text{ se } \{x\}_4 \in [0,1]; \\ \sqrt{2-(\{x\}_4 - 2)^2}, \text{ se } \{x\}_4 \in [1,3]; \\ \sqrt{1-(\{x\}_4 - 3)^2}, \text{ se } \{x\}_4 \in [3,4]. \end{cases}$$

Material elaborado por Letícia Mattos.