Equações Algébricas-Raízes e Coeficientes

Equações com Coeficientes Inteiros

3° ano E.M.

Equações Algébricas-Raízes e Coeficientes
Equações com Coeficientes Inteiros

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Nos itens abaixo, 1 é raiz de todas as equações polinomiais. Determine o valor de a sabendo que as outras raízes são números inteiros.

a) $x^2 - ax + 3 = 0$

b) $x^2 - ax + 5 = 0$

c) $x^3 + 7x^2 + ax + 7 = 0$

Exercício 2. Aplique o Teorema da Raiz Racional e encontre as raízes racionais, caso existam, das equações:

a) $5x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$.

b) $6x^3 + 13x^2 - 22x - 8 = 0$.

c) $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 6x - 4 = 0$.

d) $x^4 - x^3 - 32x^2 - 62x - 56 = 0$.

Exercício 3. Escreva o polinômio $p(x) = 18x^5 - 48x^4 + 23x^3 + 174x^2 - 171x - 60$ como o produto de dois polinômios com coeficientes inteiros.

Exercício 4. Encontre todas as raízes racionais de

a) $4x^3 - 22x^2 + 7x + 15 = 0$.

b) $40x^3 + 25x^2 + 9x - 9 = 0$.

c) $5x^2 - 12x + 4 = 0$.

d) $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$.

Exercício 5. Quais são as raízes racionais da equação $2x^3 + 3x - 5 = 0$?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Encontre todas as raízes racionais de $P(x) = 2x^4 + x^3 - 19x^2 - 9x + 9$

Exercício 7. Quais são as possíveis raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

Exercício 8. Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 - 9x^2 + 22x - 24 = 0$?

Exercício 9. Encontre todas as raízes racionais de $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Suponha que r é um número racional positivo tal que $r^2 + r$ é um inteiro. Mostre que r também é um inteiro.

Exercício 11. Sejam a, b, c inteiros , não todos iguais a zero. Mostre que se $ax^2 + bx + c = 0$ tem uma raiz racional então pelo menos um dentre a, b, c é par.

Exercício 12. Mostre que o polinômio $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ é o produto de dois polinômios não constantes de coeficientes inteiros.

Exercício 13. Mostre que $\sqrt{2}$ é racional.

Exercício 14. Quantas raízes racionais possui o polinômio $p(x) = x^{2000} - x^{1000} + x^{500} + x^{250} + 1 = 0$?

Exercício 15. Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros tal que $p(0) = 2017$ e $p(1) = 7201$. Prove que $p(x)$ não possui raízes inteiras.

Exercício 16. Dado o polinômio:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

com coeficientes inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de modo que existem quatro inteiros distintos a, b, c e d tais que

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

mostre que não existe um inteiro k tal que $f(k) = 8$.

Exercício 17. Suponha que $\sqrt[3]{a}$ é racional. Mostre que $\sqrt[3]{a}$ é um inteiro.

Exercício 18. Mostre que o número

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$$

é um número racional.

Respostas e Soluções.

1.

a) Como o produto das raízes é 3, segue que a outra raiz é 3 e assim $a = 1 + 3 = 4$.

b) Como o produto das raízes é 5, segue que a outra raiz é 5 e assim $a = 1 + 5 = 6$.

c) Como o produto das raízes é 7, segue que as outras raízes possíveis são ± 1 e ± 7. Para que o produto seja 7, temos duas opções para as três raízes: $-1, -7, 1$ ou $1, 7, 1$. Como a soma das raízes é -7, segue que as outras raízes são 1 e 7 e assim $a = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 15$.

2. Escreva o candidado a raiz racional como a fração irredutível p/q. Assim, p deve dividir o termo independente e q deve dividir o coeficiente líder. Testanto os valores possíveis, temos:

a) Não possui raízes racionais.

b) $p/q = \{4/3\}$.

c) $p/q = \{1, -2/3\}$.

d) $p/q = \{-4, 7\}$.

3. Usando o Teorema da Raiz Racional, ao buscar uma fração irredutível p/q que é raiz de $p(x)$, descobrimos que p é um divisor de 60 e q é um divisor de 18. Testando as opções originadas das combinações de divisores, podemos concluir que $4/3$ e $-5/3$ são raízes. Portanto, $p(x) = (3x - 4)(3x + 5)(2x^3 - 6x^2 + 9x + 3)$.

4.

a) $\{5\}$.

b) $\{3/8\}$.

c) $\{2, 2/5\}$.

d) $\{-1, 3, 7\}$.

5. Pelo Teorema da Raiz Racional, uma raiz racional p/q, com $mdc(p, q) = 1$, satisfaz: p divide -5 e q divide 2. Assim os possíveis candidatos são

$$\pm 1/1, \pm 1/2, \pm 5, \pm 5/2.$$

Substituindo esses valores na equação, podemos concluir que $x = 1$ é a única raiz racional.

6. Como os dividores do termo independente são ± 1, ± 3, ± 9 e os fatores do coeficiente líder são ± 1, ± 2, pelo Teorema da Raiz Racional, segue que as possíveis raízes racionais são

$$\pm \frac{1}{1}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{1}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{1}, \pm \frac{9}{2}$$

substituindo esses valores na equação, obtemos que apenas $1/2$, 3, -3 e 1 são raízes.

7. Como o polinômio é mônico, as raízes são inteiros divisores de 4. As opções são $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Testando esses valores, podemos concluir que -2 é a única raiz racional.

8. Pelo Teorema da Raiz Racional, se p/q é uma raiz racional, escrita em fatores irredutíveis p e q, devemos ter: p é um divisor de 24 e q é um divisor de 1. Assim, as raízes racionais são todas inteiras e fazem parte da lista

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24.$$

Substituindo esses valores na equação polinomial, obtemos que apenas 6 é raiz. Portanto, a única raiz inteira é $x = 6$.

9. Pelo Teorema da Raiz Racional, uma raiz racional p/q, com $mdc(p, q) = 1$, satisfaz: p divide 12 e q divide 1. Assim os possíveis candidatos são

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6 \pm 12$$

Substitutindo esses valores na equação polinomial, podemos concluir que -3, -2, 1 e 2 são as soluções.

10. Suponha que $r^2 + r = n$. Considere o polinômio $p(x) = x^2 + x - n$. Como $p(x)$ é um polinômio mônico, segue que suas raízes racionais são inteiras. Portanto r, sendo uma de suas raízes racionais, é um inteiro.

11. Seja p/q, com $mdc(p, q) = 1$, é uma raiz racional, temos

$$\begin{aligned} a(p/q)^2 + b(p/q) + c &= 0 \\ ap^2 + bpq + cq^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se a, b e c são ímpares, então $(a-1)p^2 + (b-1)pq + (c-1)q^2$ é um inteiro par. Assim, $p^2 + pq + q^2 = -(a-1)p^2 - (b-1)pq - (c-1)q^2$ é par. Como $mdc(p, q) = 1$, não podem ser p e q ambos pares. Se um for ímpar e o outro par ou ambos ímpares, teremos $p^2 + pq + q^2$ ímpar. Esse absurdo mostra que pelo menos um dentre a, b, c é par.

12. Pelo Teorema da Raiz Racional, qualquer raiz $r = \frac{a}{b}$ racional de $f(x)$ deve satisfazer $a \mid 1$ e $b \mid 2$. Então, caso possua uma raiz racional, deve ser da forma $\pm \frac{1}{1}$ e $\pm \frac{1}{2}$. Substituindo esses valores, obtemos $f(-1/2) = 0$. Assim $2x + 1$ é um fator de $f(x)$ e podemos escrever $f(x) = (2x + 1)(x^2 + 3x + 1)$.

13. Como $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio $x^2 - 2 = 0$, o Teorema da Raiz Racional garante que qualquer raiz racional de $f(x)$ é da forma $\pm \frac{1}{1}, \pm \frac{2}{1}$. Nenhum desses valores é raiz de $f(x)$ e assim f não possui raízes racionais. Então $\sqrt{2}$ não é racional.

14. Pelo Teorema da Raiz Racional, os possíveis valores racionais que são soluções da equação polinomial são $\pm\frac{1}{1}$. Como nenhum desses valores é raiz, segue que a equação polinomial não possui raízes racionais.

15. Seja $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Suponha que a é uma raiz inteira do polinômio. Como $p(0) \neq 0$, segue que $a \neq 0$. Além disso, como $p(a) = 0$, segue que a divide a_n. Daí, dado que $p(0) = a_n = 2017$, podemos concluir que a é ímpar. Como a e 1 possuem a mesma paridade, o mesmo se passa com $p(a)$ e $p(1)$. Outra forma de ver isso é perceber que $a-1$ divide $p(a) - p(1)$. Isso é um absurdo, pois $p(a) = 0$ é par e $p(1) = 7201$ é ímpar.

16. (Extraído da Olimpíada Canadense) Considere o polinômio $g(x) = f(x) - 5$. Como a, b, c e d são raízes de $g(x)$, temos

$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)h(x),$$

para algum polinômio $h(x)$ com coeficientes inteiros. Se k é um inteiro tal que $f(k) = 8$, temos $g(k) = 3$ e

$$3 = (k-a)(k-b)(k-c)(k-d)h(k).$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, considerando a fatoração em primos de 3, os 4 inteiros distintos $k-a$, $k-b$, $k-c$ e $k-d$ devem pertencer ao conjunto $\{-3,-1,1,3\}$. Assim, a única opção é que $\{k-a, k-b, k-c, k-d\} = \{-3,-1,1,3\}$ Entretanto, o produto desses inteiros não é 3. Logo, não existe tal inteiro k.

17. Escreva $\sqrt[3]{a} = \frac{x}{y}$, com $mdc(x,y) = 1$. Elevando a equação ao cubo, temos $ay^3 = x^3$. Suponha que y possua um fator primo p. Como p divide ay^3, então p divide x^3, ou seja, p divide x. Isso contradiz $mdc(x,y) = 1$. Portanto, y não possui fatores primos e daí $y = \pm 1$. Assim, $\sqrt[3]{a} = x$ é um inteiro.

18. (Extraído do Vestibular do IME - 1991) Sejam

$$\begin{aligned} a &= 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \\ b &= -3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \end{aligned}$$

Então $\sqrt[3]{ab} = \frac{5}{3}$ e $a - b = 6$. Se

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \\ x^3 &= a - 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) - b \\ x^3 &= 6 - 30x \end{aligned}$$

Daí $x^3 + 5x - 6 = 0$. Pelo Teorema da Raiz Racional, os possíveis valores racionais que são soluções da equação polinomial são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Substituindo esses valores, podemos descobrir que $x = 1$ é raiz. Assim, $x^3 + 5x - 6 = (x-1)(x^2 + x + 6)$. Como $x^2 + x + 6$ não possui raiz real e x é real, segue que $x = 1$. Portanto, o número dado é igual ao racional 1.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM