Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau

Inequações Produto do Segundo Grau

1° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau
Inequações Produto do Segundo Grau

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações

a) $(x^2 + x/2 - 1/2)(x^2 - 1) \geq 0$

b) $(x^2 - 2x)(-x^2 + 4x - 3) \leq 0$

c) $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 4) > 0$

d) $(-x^2 - x/2)(-x^2 + 3x - 2) \leq 0$

e) $(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3)(-x^2 + 2x) > 0$

f) $(4x^2 - 8x + 4)(-1 + 2x - x^2) \geq 0$

g) $(-x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 2) > 0$

h) $(-x^2 - 3)(x^2 - 2) < 0$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 2. Dentre os números inteiros que são soluções da inequação

$$(5 - x)(x^2 - 12x + 11) > 0,$$

qual deles é o maior?

Exercício 3. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações

a) $(3x - x^2)^3(x^2 - 1) < 0$

b) $(x^2 + 3x - 4)(1 - 2x)^3 \leq 0$

c) $(-2x^2 - x + 1)(-1 + 3x^2)^2 \geq 0.$

Exercício 4. Para quais valores reais de x vale a inequação

$$(x^2 - 3x + 4)(-x^2 - 1) \geq -2x^2 - 2?$$

Exercício 5. Para quais valores reais de x vale a inequação

$$(x^2 + 2x - 1)(x + 1) \geq x^2 - 1?$$

Exercício 6. Para quais valores reais de x vale a inequação

$$x - 1 \leq (x - 1)(x + 2)^2?$$

Exercício 7. Para quais valores reais de x vale a inequação

$$(x + 1)^3 - 2 > 2x?$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que se tenha

$$(x^2 + mx + 1)(x^2 + 1) > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 9. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que se tenha

$$(-x^2 + x - 2)(-x^2 + 2x - m) \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 10. Se $x^2(x - k) < (x^2 + 1)(x + k)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, qual condição k satisfaz?

Exercício 11. Quais valores reais de x satisfazem

$$(x^2 - x + 6)^{1000}(x^2 - 2x - 3)^{999} \geq 0?$$

Exercício 12. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações

a) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geq 0$

b) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \leq 0.$

Exercício 13. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais é válida a inequação

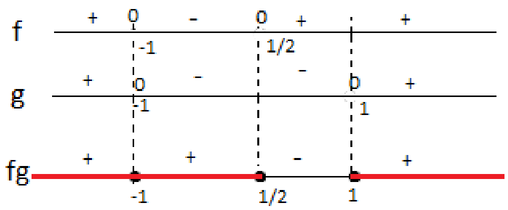
$$(x^2 - 4)(1 - x^2)(x^2 - 2x + 8) < 0.$$

Exercício 14. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais é válida a inequação

$$(2x^2 + x - 1)(x^2 - 5x)(x - 1)^3 \geq 0.$$

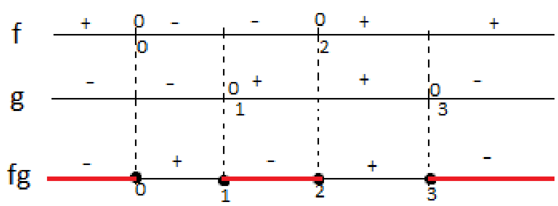
Respostas e Soluções.

1. a) Considere $f(x) = x^2 + x/2 - 1/2$ e $g(x) = x^2 - 1$. Analisando os sinais dos fatores



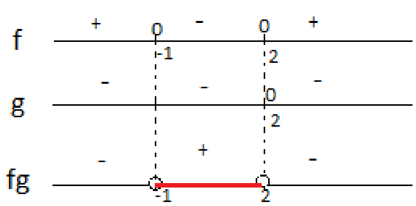
Assim, o conjunto solução é $S =]-\infty, 1/2] \cup [1, +\infty[$.

b) Considere $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 3$. Analisando os sinais dos fatores

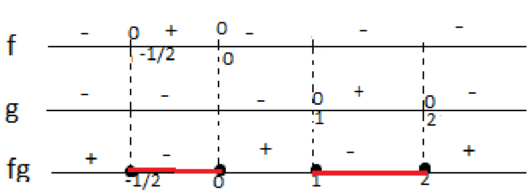


Assim, o conjunto solução é $S =]-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup [3, +\infty[$.

c) Considere $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 4$. Analisando os sinais dos fatores



Assim, o conjunto solução é $S =]-1, 2[$.
Note que, como $g < 0$ para todo x e a inequação é $fg > 0$, basta encontrarmos os valores de x onde $f < 0$.
d) Considere $f(x) = -x^2 - x/2$ e $g(x) = -x^2 + 3x - 2$. Analisando os sinais dos fatores



Assim, o conjunto solução é $S = [-1/2, 0] \cup [1, 2]$.

e) Considere $f(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})^2$ e $g(x) = -x^2 + 2x = -x(x-2)$. Como a inequação é $fg > 0$ e $f \geq 0$, só precisamos observar onde $g > 0$ e retirar os pontos onde $f = 0$. Temos $g > 0$ em $]0, 2[$ e $f = 0$ em $\sqrt{3}$. Assim, $S =]0, 2[\setminus \{\sqrt{3}\}$.

f) Note que $4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$ e $-1 + 2x - x^2 = -(1-x)^2$. Considere $f(x) = 4(x-1)^2$ e $g(x) = -(1-x)^2$. Temos que $f \geq 0$ e $g \leq 0$ para todo x. Logo, o produto $fg \leq 0$ para todo x, sendo nulo quando $f = 0$ ou $g = 0$, o que acontece apenas se $x = 1$. Assim, o conjunto solução é $S = \{1\}$.

g) Considere $f(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$ e $g(x) = x^2 + x + 2$. Note que $g > 0$ para todo x e $f \leq 0$ para todo x, assim $fg \leq 0$ para todo x. Então, $S = \emptyset$.

h) Considere $f(x) = -x^2 - 3$ e $g(x) = x^2 - 2$. Como $f < 0$ para todo x, devemos ter $g > 0$ para garantir que $fg < 0$. A função g é positiva para $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$. Assim, $S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

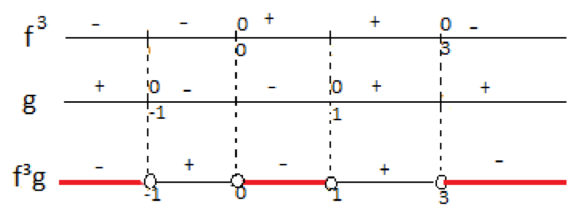
2. Analisando os sinais dos fatores a inequação é válida para $x \in]-\infty, 1[\cup]5, 11[$. O maior inteiro nesse conjunto é $x = 10$.

3. Use que

(i) O sinal de $f(x)$ é o mesmo sinal de $f(x)^3$;

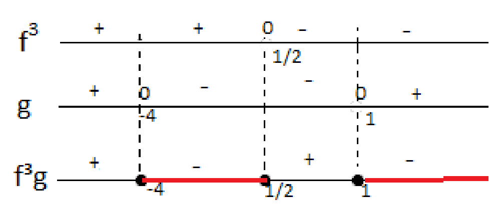
(ii) $f(x)^2 \geq 0$ para todo x e $f(x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

a)Defina $f(x) = 3x - x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$. Analisando os sinais dos fatores, temos



Assim, o conjunto solução é $S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[$.

b)Defina $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = x^2 + 3x - 4$. Analisando os sinais dos fatores, temos



Assim, o conjunto solução é $S = [-4, 1/2] \cup [1, +\infty[$.

c)Defina $f(x) = -2x^2 - x + 1$ e $g(x) = -1 + 3x^2$. Temos que $g^2 \geq 0$ e $g(x) = 0$ em $x = \pm\sqrt{3}/3$. A função $f(x) \geq 0$ em $[-1, 1/2]$. Assim, o conjunto solução é $S = [-1, 1/2] \cup \{-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\} = [-1, 1/2] \cup \{\sqrt{3}/3\}$.

4.
$$
\begin{aligned}
&(x^2-3x+4)(-x^2-1) \geq -2x^2-2\\
\Leftrightarrow&(x^2-3x+4)(-x^2-1) \geq 2(-x^2-1)\\
\Leftrightarrow&x^2-3x+4 \leq 2\\
\Leftrightarrow&x^2-3x+2 \leq 0\\
\Leftrightarrow&1 \leq x \leq 2,
\end{aligned}
$$
onde, na segunda equivalência divido ambos os lados da inequação por $-x^2-1$, notando que esse termo é sempre negativo. Outra maneira seria subtrair o termo $2(-x^2-1)$ dos dois lados da inequação obtendo $(x^2-3x+4-2)(-x^2-1) \geq 0$ e analisar os sinais dos dois fatores.

5.
$$
\begin{aligned}
&(x^2+2x-1)(x+1) \geq x^2-1\\
\Leftrightarrow&(x^2+2x-1)(x+1) \geq (x-1)(x+1)\\
\Leftrightarrow&\left[(x^2+2x-1)-(x-1)\right](x+1) \geq 0\\
\Leftrightarrow&(x^2+x)(x+1) \geq 0\\
\Leftrightarrow&x(x+1)(x+1) \geq 0\\
\Leftrightarrow&x(x+1)^2 \geq 0\\
\Leftrightarrow&x \geq 0 \quad ou \quad x=-1.
\end{aligned}
$$

6.
$$
\begin{aligned}
&x-1 \leq (x-1)(x+2)^2\\
\Leftrightarrow&0 \leq (x-1)[-1+(x+2)^2]\\
\Leftrightarrow&0 \leq (x-1)(x^2+4x+3)\\
\Leftrightarrow&-3 \leq x \leq -1 \quad ou \quad x \geq 1.
\end{aligned}
$$

7.
$$
\begin{aligned}
&(x+1)^3-2 > 2x\\
\Leftrightarrow&(x+1)^3 > 2(x+1)\\
\Leftrightarrow&(x+1)^2(x+1) > 2(x+1)\\
\Leftrightarrow&[(x+1)^2-2](x+1) > 0\\
\Leftrightarrow&[x^2+2x-1](x+1) > 0\\
\Leftrightarrow&-1-\sqrt{2} < x < -1 \quad ou \quad x > -1+\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

8. Como $x^2+1>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2+mx+1>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Considerando $f(x)=x^2+mx+1$, temos $a=1>0$, então
$$f(x)>0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2-4>0 \Leftrightarrow m<-2 \quad ou \quad m>2.$$

9. Defina $f(x)=-x^2+x-2$. Temos $a=-1<0$ e $\Delta=-7<0$, logo $f(x)<0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, devemos ter $-x^2+2x-m \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $g(x)=-x^2+2x-m$, temos $a=-1<0$. Então, devemos ter
$$\Delta = 4-4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

10.
$$
\begin{aligned}
&x^2(x-k) < (x^2+1)(x+k)\\
\Leftrightarrow&x^2(x-k-x-k) < x+k\\
\Leftrightarrow&-2kx^2-x-k<0\\
\Leftrightarrow&2kx^2+x+k>0.
\end{aligned}
$$
Devemos ter duas condições

1. $a=2k>0 \Leftrightarrow k>0.$

2. $\Delta>0 \Leftrightarrow 1-8k^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}/4<k<\sqrt{2}/4.$

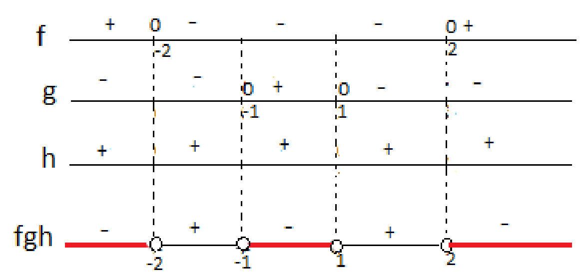
Como as duas condições devem ser satisfeitas simultâneamente, devemos ter $0<k<\sqrt{2}/4$.

11. Defina $f(x)=x^2-x+6$ e $g(x)=x^2-2x-3$. Como o expoente de f é par, o termo $f(x)^{1000}$ é sempre maior ou igual a zero, sendo igual a zero nas raízes de f. Temos para f que $\Delta<0$, logo f nunca se anula. Aqui, $f^{1000}g^{999} \geq 0 \Leftrightarrow g^{999} \geq 0$. Como o expoente de g é ímpar, então $g(x)^{999}$ tem o mesmo sinal que g. Daí, $g^{999} \geq 0 \Leftrightarrow g \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$.

12. a)
$$
\begin{aligned}
&x^3-3x^2+x-3 \geq 0\\
\Leftrightarrow&x^2(x-3)+x-3 \geq 0\\
\Leftrightarrow&(x^2+1)(x-3) \geq 0\\
\Leftrightarrow&x-3 \geq 0\\
\Leftrightarrow&x \geq 3,
\end{aligned}
$$
onde a penúltima equivalência vale, porque $x^2+1>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $S=\{x \in \mathbb{R}; x \geq 3\}$.

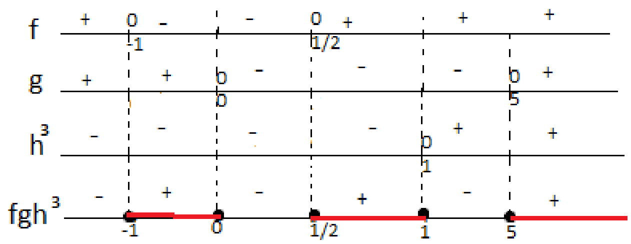
b)
$$
\begin{aligned}
&x^3-3x^2+2x-6 \leq 0\\
\Leftrightarrow&x^2(x-3)+2(x-3) \leq 0\\
\Leftrightarrow&(x^2+2)(x-3) \leq 0\\
\Leftrightarrow&x-3 \leq 0\\
\Leftrightarrow&x \leq 3,
\end{aligned}
$$
uma vez que $x^2+2>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $S=\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$.

13. Defina $f(x)=x^2-4$, $g(x)=1-x^2$ e $h(x)=x^2-2x+8$. Analisando os sinais dos fatores temos:



Assim, o conjunto solução é $S=]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$.

14. Defina $f(x)=2x^2+x-1$, $g(x)=x^2-5x$ e $h(x)=x-1$. Analisando os sinais dos fatores temos:



Assim, o conjunto solução é $S = [-1, 0] \cup [1/2, 1] \cup [5, +\infty[$.

Material elaborado por Lorena Bulhosa