

Exercícios – Módulo Eletrostática I

Força Elétrica

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Vinicius Henning

Revisor: Lucas Lima



1. Exercícios resolvidos sobre eletrostática

1) Considere um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede b e cujos catetos têm tamanho d . Suponha que em cada vértice do triângulo seja colocada uma carga puntiforme q de massa desprezível, como exemplificado na Fig. (1). Utilize o sistema de coordenadas adotado e calcule a força resultante sobre a carga posicionada no vértice A do triângulo.

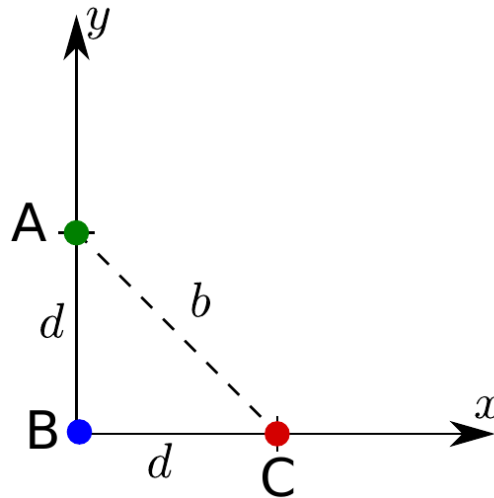


Fig. (1): Ilustração para o problema de interação entre três cargas elétricas.

Solução: Primeiramente, nós precisamos saber todas as forças que estão atuando sobre a carga no vértice A. Como a massa é desprezível, vamos considerar apenas as interações eletrostáticas. Assim, precisamos saber a força que a carga em B exerce sobre a carga em A, e a força que a carga em C exerce sobre a carga em A. Fazemos algumas considerações preliminares.

- i. **Todas as cargas são iguais:** Isso nos diz que as forças entre elas são forças de repulsão, isto é, as cargas tendem a se afastar umas das outras.
- ii. **Força que B realiza sobre A:** A força é repulsiva e dá-se ao longo da linha que une as duas cargas. Assim, como a carga em B está diretamente abaixo da carga em A, a força está inteiramente ao longo do eixo vertical e aponta de baixo para cima. Nesse caso não temos uma componente da força ao longo do eixo horizontal. A força então é representada pelo vetor azul na Fig. (2).
- iii. **Força que C realiza sobre A:** A força é repulsiva e dá-se ao longo da linha que une as duas cargas. Portanto, se pensarmos na componente horizontal da força, o sentido dela é da direita para a esquerda. Ao longo da direção vertical o sentido é de baixo para cima (se pensarmos em quadrantes, essa força encontra-se no segundo quadrante). Assim, essa força é representada pelo vetor vermelho na Fig. (2).
- iv. **Força total:** a força total é a soma das duas forças descritas acima. De acordo com o sistema de coordenadas adotado, ambas as forças possuem componentes no sentido

positivo do eixo y. A força que a carga em C exerce sobre a carga em A possui uma componente no sentido negativo do eixo x. Assim, nós esperamos encontrar uma força de componente y positiva e de componente x negativa.

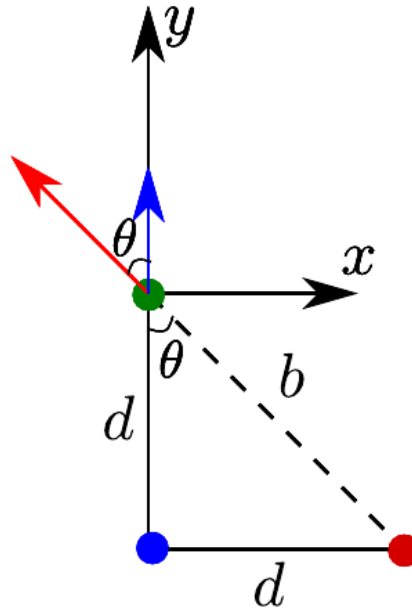


Fig. (2): Ilustração das forças elétricas que atuam sobre a carga no vértice A. A cor das setas corresponde à carga que está exercendo a força. A flecha vermelha corresponde à força exercida pela carga em C (vermelha) sobre a carga em A. A flecha azul corresponde à força exercida pela carga em B (azul) sobre a carga em A. As letras A, B e C foram omitidas para deixar o desenho mais limpo. Os tamanhos dos vetores não estão em escala, apenas visam ilustrar as direções.

Cálculo:

Como o triângulo é retângulo e isósceles, ele é composto por um ângulo reto, e os ângulos entre cada cateto e a hipotenusa medem $\theta = 45^\circ$. Lembre que a força eletrostática entre duas cargas puntiformes q_1 e q_2 é dada por

$$\mathbf{F}_{el} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

A distância entre A e B é d , ambas as cargas valem q , e o vetor que representa o sentido de baixo para cima é \hat{j} , de modo que a força que a carga em B exerce sobre a carga em A é dada por

$$\mathbf{F}_{B(A)} = k \frac{q^2}{d^2} \hat{j}$$

A força que a carga em C exerce sobre a carga em A possui duas componentes. Representamos na Fig. (3) uma situação análoga para vermos melhor a decomposição do vetor em suas componentes.

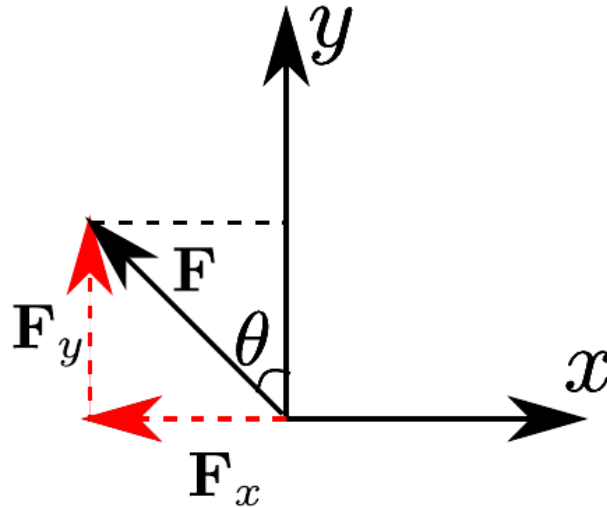


Fig. (3): Representação da decomposição vetorial de uma força que possui componentes x negativa e y positiva. O ângulo entre a força e o eixo y é θ .

Analisando o triângulo formado pelo vetor F e as suas componentes F_x e F_y , temos a seguinte relação:

$$|F_x| = |F| \sin \theta$$

$$|F_y| = |F| \cos \theta$$

Assim, utilizando a expressão para a força eletrostática e a decomposição acima, podemos ver que a componente x da força é dada por

$$F_{C(A)[x]} = -k \frac{q^2 \sin \theta}{b^2} \hat{i}$$

De maneira análoga, a componente y é

$$F_{C(A)[y]} = k \frac{q^2 \cos \theta}{b^2} \hat{j}$$

Agora nós temos todas as forças que atuam sobre a carga em A e suas representações no sistema de coordenadas adotado. Assim, se somarmos as forças que as cargas em C e em B exercem sobre a carga em A, nós obtemos a força total

$$F_A = -k \frac{q^2 \sin \theta}{b^2} \hat{i} + kq^2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{\cos \theta}{b^2} \right) \hat{j}$$

Análise do resultado:

Nós vamos fazer agora umas análises interessantes, que podem ser muito úteis para verificar o nosso resultado. Primeiramente, podemos verificar que cada termo do nosso resultado possui de fato dimensão de força. Empregando unidades do sistema internacional, a constante dielétrica do vácuo é dada por $k = 9 \cdot 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$. As cargas ao quadrado são medidas em

unidades de C^2 e a distância de m . Como as funções trigonométricas seno e cosseno são adimensionais, nós constatamos que, de fato, todos os termos possuem unidade de força (isto é, Newton).

Uma outra análise muito útil, quando temos um resultado mais complicado, é tentar transformá-lo em um resultado que já conhecemos. Isso pode ser feito de diferentes maneiras. Uma delas é a seguinte: a carga que gera o caráter complicado no resultado para a força é a carga que está no ponto C, pois ela está fora do eixo e possui componentes tanto em x quanto em y . *O que acontece se nós retirarmos a carga que está no ponto C?*

No nosso exercício isso pode ser feito descartando as contribuições que dependem de b (a distância entre os pontos A e C). Fazendo isso, a força seria integralmente devida à presença da carga no ponto B, e obteríamos

$$\mathbf{F}_A = k \frac{q^2}{d^2} \hat{j},$$

que é o resultado para a força eletrostática entre duas cargas iguais separadas por uma distância d , onde uma está localizada na origem e a outra está localizada no eixo y no ponto d . Como uma última análise para esse problema, vamos analisar as componentes da força. Note que como $\theta = 45^\circ$, tanto o seno quanto o cosseno são positivos. A constante k também é positiva, e as cargas e distâncias ao quadrado, idem. Assim, a análise para as componentes da força pode ser feita simplesmente olhando o sinal associado a elas. Assim, vemos que a componente ao longo de x é negativa e a componente y é positiva, ou seja, a força pertence ao segundo quadrante, como discutimos antes de começar os cálculos.

2) Considere duas esferas condutoras puntiformes de carga $q_1 = 6\mu C$ e $q_2 = -4\mu C$, separadas por uma distância de $d = 10cm$.

a) Calcule a força eletrostática entre as duas esferas.

b) Numa segunda situação, essas duas esferas são colocadas em contato e são separadas novamente a uma distância de $d = 10cm$. Descreva o processo físico que ocorre. Qual a nova força de interação entre elas?

c) Se essa força for diferente da força calculada em (2.a), quão distante as esferinhas precisam estar para gerar a mesma força em valor absoluto?

P.S.: Lembre-se que $k = 9.10^9 N \cdot m^2 / C^2$ e que $\mu C = 10^{-6} C$ (lê-se micro Coulomb).

Solução:

a) A situação está representada na figura 4

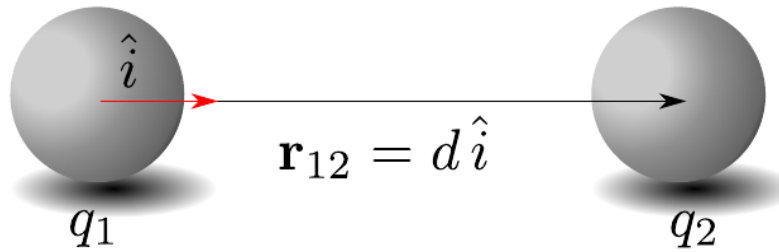


Fig.(4): Desenho da interação eletrostática entre duas esferas de cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância d . O tamanho das esferas não está em escala.

Um hábito interessante de criarmos é somente substituímos os valores no final, depois de já feita toda álgebra necessária para a obtenção do resultado. Isso nos permite (antes da substituição) verificar se nosso resultado está coerente. Por exemplo, ao se esquecer de colocar uma das cargas na fórmula, nossa força não terá unidade de Newton, e saberemos rapidamente que algo de incorreto foi feito.

Pela lei de Coulomb, nós sabemos que a força que a carga q_2 sofre é

$$\mathbf{F}_{el} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Nossas cargas estão separadas por uma distância d . Assim o vetor distância que aponta da carga q_1 para a carga q_2 possui módulo d . Dessa maneira, o vetor unitário \hat{i} aponta da carga q_1 para a q_2 , como mostrado na Fig. (4). Substituindo os valores fornecidos no enunciado

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{el} &= k \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{i} \\ &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(-4 \cdot 10^{-6} C)(6 \cdot 10^{-6} C)}{(0,1m)^2} \hat{i} \\ &= -21,6 N \hat{i} \end{aligned}$$

Note que nós tivemos que converter a unidade de centímetro para metro. Vemos também que a força é negativa ao longo do eixo x que definimos. Isso nos diz que a esfera de carga q_2 sente uma força puxando-a ao longo do eixo x , em direção à carga q_1 . Isto é, no sentido negativo de x . Um ponto interessante de ressaltar é o quanto a força elétrica é uma “interação forte”, quando comparamos com a interação gravitacional. Se juntarmos duas cargas separadas por uma distância de $0,1m$, elas se atraem com a mesma intensidade que um corpo de massa $m = 2kg$ é atraído pela Terra!!

b) Como são duas esferas condutoras, ao se tocarem ocorrerá um fluxo de elétrons de q_2 para q_1 , já que a esfera com carga q_2 possui um excesso de elétrons, enquanto a esfera com carga q_1 teve

elétrons removidos. Após o contato, as esferinhas terão uma quantidade igual de cargas $q_1 = q_2 = 1\mu C$. Assim, ao aplicarmos a lei de Coulomb para essa interação, teremos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{el} &= k \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{i} \\ &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(1 \cdot 10^{-6} C)(1 \cdot 10^{-6} C)}{(0,1m)^2} \hat{i} \\ &= 0,9N \hat{i}\end{aligned}$$

E notamos que agora a força é positiva ao longo do eixo x , ou seja, após o contato as esferinhas passam a sentir uma força repulsiva.

c) Dessa vez nós temos a força e queremos obter a distância. Então precisamos inverter a lei de Coulomb:

$$d^2 = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{F}_{el}|}$$

Introduzindo os valores de carga e força elétrica, obtemos

$$\begin{aligned}d^2 &= k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{F}_{el}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(1 \cdot 10^{-6} C)(1 \cdot 10^{-6} C)}{21,6N} \\ &\simeq 0,42 \cdot 10^{-3} m^2\end{aligned}$$

Se tirarmos a raiz quadrada, obtemos

$$d \simeq 0,02m$$

O símbolo acima (ao invés do símbolo de igualdade) significa que é aproximadamente igual, pois estamos considerando apenas duas casas decimais.

Um outro ponto importante para ser lembrado é que logo no começo nós padronizamos as unidades que íamos utilizar. Por exemplo, apesar da distância inicial ter sido dada em centímetros, nós convertemos para metro logo no começo. Apesar de parecer simples, isso nos ajuda a não precisar pensar se as unidades da nossa resposta estão corretas. Se não tomarmos cuidado podemos muitas vezes chegar a resultados absurdos. Essa prática simples poderia ter evitado a colisão de uma sonda espacial em Marte no valor de 125 milhões de dólares, conforme pode ser conferido no *link*

<https://www1.folha.uol.com.br/fsp/turismo/fx1303200017.htm>

3) Considere duas esferas pontuais de cargas idênticas $q_1 = q_2 = 3\mu C$ e massas $m_1 = m_2 = 200g$. Essas esferas estão dispostas ao longo do eixo vertical, separadas por uma distância $d = 30cm$, como mostrado na Fig. (5). Considere $k = 9.10^9 N.m^2/C^2$ e a aceleração da gravidade $g = 10 m/s^2$.

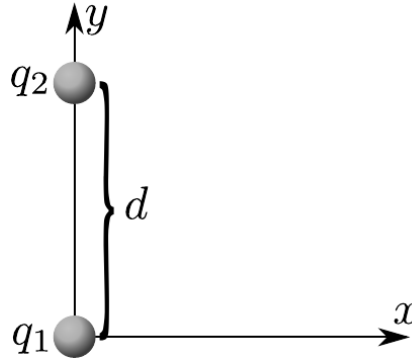


Fig. (5): Ilustração para a discussão da interação gravitacional e eletrostática entre duas esferas de cargas $q_1 = q_2$ ambas com massa m separadas por uma distância d .

- Descreva a situação física para o sistema descrito acima, isto é, a atuação das forças gravitacional e força elétrica sobre as esferas e a direção das forças.
- Calcule as forças gravitacional e elétrica atuando sobre a esfera q_2 . Essas forças estão em equilíbrio? Discorra sobre.
- Caso as forças sobre q_2 não estejam em equilíbrio, a que distância elas ficariam em equilíbrio?

Solução:

a) Do ponto de vista elétrico, como ambas as cargas são positivas, elas sofrem uma interação repulsiva. Assim, a carga q_1 sofre uma força elétrica empurrando-a para baixo, enquanto que a carga q_2 sofre uma força elétrica empurrando-a para cima. Ambas as cargas possuem massa, assim, ambas sofrem uma interação gravitacional puxando-as para baixo em direção ao solo. Dessa forma, atuam duas forças sobre a carga q_1 , puxando-a para baixo, enquanto a carga q_2 está sob uma disputa de forças, uma para baixo (gravitacional) e outra para cima (elétrica).

b) A força elétrica é dada pela lei de Coulomb. Definindo a origem do sistema de coordenadas centrado na esfera de carga q_1 e o sentido positivo do eixo y como sendo pra cima, nós temos que a força elétrica em q_2 é dada por

$$\mathbf{F}_{el} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \hat{j}$$

onde o vetor unitário aponta da carga q_1 para a carga q_2 . Note que como o produto de cargas é positivo (pois possuem o mesmo sinal), essa força dá-se ao longo do sentido positivo do eixo y . Fazendo a conversão para o SI, temos $d = 0,3m$, e substituindo os valores na fórmula acima:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{el} &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{Nm^2}{C^2} \right) \frac{(3 \cdot 10^{-6}C)(3 \cdot 10^{-6}C)}{(0.3m)^2} \\ &= 0,9N \end{aligned}$$

A força gravitacional é dada por

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}.$$

Como sabemos, a gravidade puxa os corpos para baixo. Assim, como nós escolhemos o eixo y positivo para cima, a força da gravidade no nosso sistema de coordenadas dá-se na direção do vetor unitário $-\hat{j}$. Fazendo então o cálculo para a força da gravidade para a esferinha q_2 , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_g &= mg(-\hat{j}) \\ &= -0,2 \cdot 10N\hat{j} \\ &= -2N\hat{j}. \end{aligned}$$

Note que nós fizemos a conversão para o SI, $200g = 0,2kg$. Comparando as duas forças nós vemos que, de fato, a força gravitacional aponta no sentido negativo do eixo y com intensidade de $2N$, enquanto que a força elétrica empurra a esferinha para cima com intensidade de $0,9N$. Assim, vemos que a resultante das forças é para baixo. Isto é, a força da gravidade vence a força elétrica, e a esferinha tende a cair. Concluimos então que as esferinhas não estão em equilíbrio.

c) Para o corpo estar numa situação de equilíbrio, a resultante das forças agindo sob o corpo precisa ser zero. Como a interação somente se dá ao longo do eixo y , a análise é muito mais simples. Como de costume, vamos fazer uma análise quantitativa do problema para analisarmos nossa interpretação do resultado *a posteriori*.

Como a força elétrica é antiparalela à força da gravidade e aumenta quanto menor for a distância d , sabemos **com certeza** que uma situação de equilíbrio pode ser encontrada. Assim, nós sabemos que a distância encontrada para contrabalancear a força gravitacional precisa **necessariamente** ser menor que $d = 30cm$. O que esperamos encontrar é mostrado na Fig. (6) abaixo.

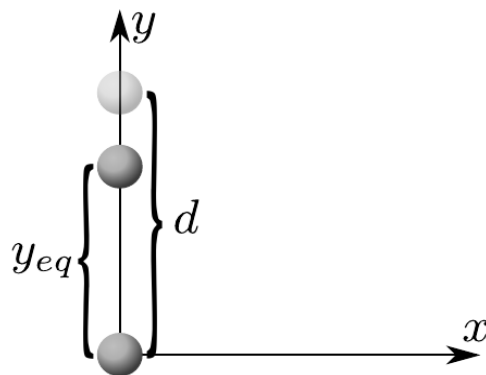


Fig. (6): Ilustração para a discussão sobre a posição de equilíbrio y_{eq} entre as duas esferinhas.

A condição que queremos é a seguinte:

$$|\mathbf{F}_g| = |\mathbf{F}_{el}| \Rightarrow mg = k \frac{q_1 q_2}{y_{eq}^2}$$

onde o y_{eq} é a posição y de equilíbrio que queremos encontrar. Invertendo a equação acima para obtermos y_{eq} :

$$\begin{aligned} y_{eq} &= \pm \sqrt{k \frac{q_1 q_2}{mg}} \\ &= \sqrt{9 \cdot 10^9 \left(\frac{Nm^2}{C^2} \right) \frac{(3 \cdot 10^{-6}C)(3 \cdot 10^{-6}C)}{2N}} \\ &= \sqrt{405 \cdot 10^{-4}} \\ &\simeq 20 \cdot 10^{-2}m \\ &= 20cm. \end{aligned}$$

Primeiramente, nós observamos que na primeira equação acima nossa expressão para a força tem unidade de distância, já que a unidade de $[mg]$ é Newton, e a de $[q_1 q_2]$ é Coulomb ao quadrado. Devido à presença da constante de Coulomb k , nós obtemos dentro da raiz quadrada algo que possui dimensão de metro ao quadrado. Assim, nossa fórmula possui a unidade correta! Além disso, podemos desconsiderar a solução negativa, pois sabemos que a situação de equilíbrio acontece quando y_{eq} é positivo. Substituindo então os valores, nós obtemos $y_{eq} = 20cm$, que é menor que a distância anterior, como já havíamos previsto!

4) Considere um bloco de tamanho desprezível carregado com uma carga $q = 5\mu C$ e massa $m = 45g$. Esse bloco está a uma altura $h = 1m$ sobre um plano inclinado de inclinação $\theta = 30^\circ$. Na parte mais baixa do plano inclinado existe uma partícula de carga Q . Supondo que não exista atrito entre o plano inclinado e o bloco, qual deve ser o valor da carga Q para que o bloco permaneça parado na sua posição inicial?

Solução:

Primeiramente, vamos desenhar o problema com as informações que temos e as forças envolvidas, conforme ilustrado na Fig. (7) abaixo. Nós também representamos os eixos coordenados (em vermelho) para facilitar nossa discussão.

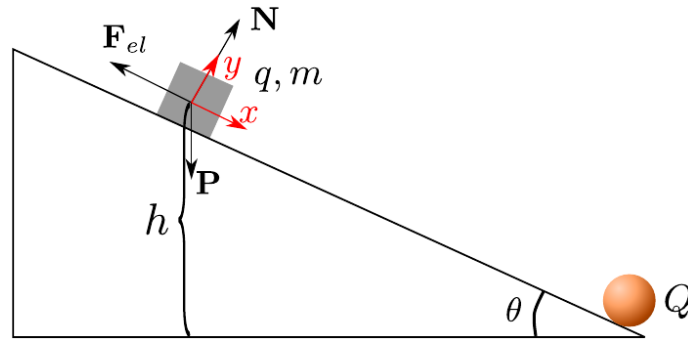


Fig. (7): Ilustração para o problema de anulação da aceleração do corpo no bloco inclinado via força eletrostática. Temos o desenho do problema, com a marcação de forças atuando sobre o bloco e o eixo coordenado convenientemente escolhido

Primeiramente, note que às vezes é conveniente escolher o eixo coordenado de forma que um dos eixos seja paralelo ao plano inclinado. Com a escolha feita acima, nós conseguimos botar tanto a força normal quanto a força elétrica sobre os eixos coordenados. A força normal possui componente (positiva) somente ao longo do eixo y e a força elétrica com componente (negativa) ao longo do eixo x . A força peso possui componentes em ambos os eixos, uma componente ao longo do sentido positivo do eixo x e uma componente ao longo do sentido negativo do eixo y . Assim, como queremos a condição para que o bloco permaneça em repouso, impomos que a resultante das forças seja nula.

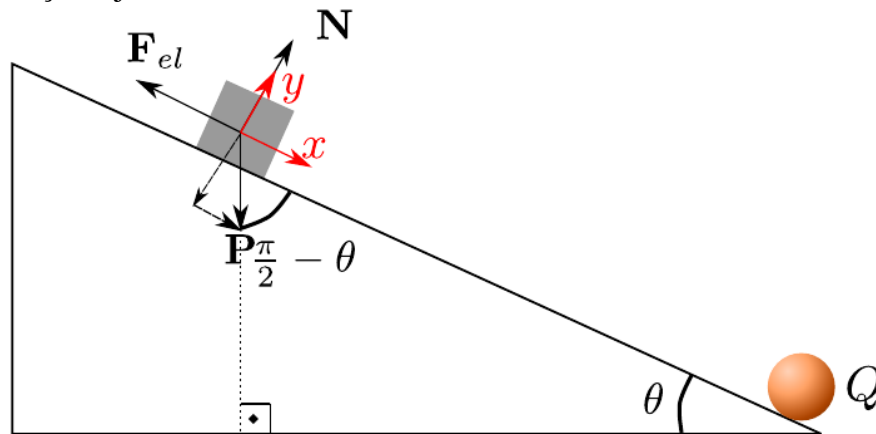


Fig.(8): Uma versão mais “limpa” do desenho anterior explicitando as semelhanças de triângulos no problema, para facilitar a decomposição da força peso em suas componentes.

Observando a linha pontilhada dada pelo prolongamento ao longo do vetor da força peso, podemos ver que a componente y do peso é dada por $P_y = -mg \cdot \cos\theta$, enquanto que a componente x é dada por $P_x = mg \cdot \sin\theta$.

Agora só precisamos calcular a força elétrica. Para isso, precisamos saber a distância entre o bloco e a carga pontual. Note que a distância informada no problema é a altura $h = 1m$. Assim, por trigonometria, a distância do bloco para a esfera é $d = h \sin \theta$.

Sobre a força elétrica, nós já sabemos que $Q > 0$, pois precisamos ter uma força repulsiva. Além disso, nós precisamos que a **força elétrica compense a componente P_x da força peso**. Assim, a condição matemática que buscamos é a seguinte:

$$mg \sin \theta = k \frac{qQ}{(h/\sin \theta)^2}$$
$$\Rightarrow Q = \frac{h^2 mg}{qk \sin \theta}$$

Note que na equação acima, na segunda linha, o lado direito da igualdade tem unidade de Coulomb, verificando que a dimensão está correta.

Fazendo as substituições, temos:

$$Q = 20 \mu C$$

P.S.: Não se esqueça de converter o peso em gramas para quilogramas!! Assim, constatamos que se tomarmos $Q = 20 \mu C$ na parte mais baixa da rampa, com inclinação $\theta = 30^\circ$, ela é capaz de contrabalancear a componente do peso do bloco que o faria descer o plano inclinado.