Módulo Divisibilidade

MDC e MMC

6° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Divisibilidade
MDC e MMC

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule o MDC dos seguintes números.

a) 12 e 15.

b) 60 e 72.

c) 120 e 180.

Exercício 2. Calcule o MMC dos seguintes números.

a) 6, 9 e 15.

b) 12 e 21.

c) 45, 60 e 75.

Exercício 3. Patrícia possui 48 flores amarelas, 60 flores rosas e 72 flores vermelhas e precisa fazer arranjos de maneira que todos os arranjos tenham a mesma quantidade de flores amarelas, a mesma quantidade de flores vermelhas e a mesma quantidade de flores rosas. Quantas flores cada arranjo possuirá se a quantidade de arranjos deve ser a menor possível e todas as flores sejam utilizadas?

Exercício 4. André, Bruno e Carlos estão competindo em uma pista circular de kart. Eles largam juntos e André leva 36 segundos para completar cada volta, Bruno demora 40 segundos em cada volta e Carlos, 48 segundos. Depois de quantas voltas após a largada eles passarão juntos pelo ponto de largada?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Calcule o MDC de 3200, 4000 e 3800.

Exercício 6. Para realizarmos uma adição de frações, precisamos que todos os denominadores sejam iguais. Para isso, calculamos um múltiplo comum a todos eles, de preferência o menor. Para a adição

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5},$$

qual seria o denominador comum a todos, que facilitaria nossos cálculos?

Exercício 7. Determine os valores de a e b, para que o MDC entre os números 360 e $2^a \cdot 3^b$ seja 12.

Exercício 8. Jonas, ao calcular o MDC entre dois números, acabou rasurando parte dos cálculos. Se o MDC entre estes dois números é 10 e ele recuperou parte dos cálculos, conforme a figura, quais eram estes números (representados por x e y)?

	1	2	1	12	
x	y			10	0

Exercício 9. Ana, Berta e Catarina são médicas que dão plantão em um hospital de 6 em 6 dias, 8 em 8 dias e 10 em 10 dias, respectivamente. Se hoje elas deram plantão juntas, daqui a quantos dias elas darão plantão juntas novamente?

Exercício 10. O MMC entre A e 78 é 156. Quantos são os possíveis valores de A?

Exercício 11. Num cesto havia entre 50 e 60 ovos que, contados de 3 em 3, sobravam 2 e contados de 5 em 5 sobravam 4. Qual era o número de ovos?

Exercício 12. Uma parede retangular de $600cm$ de comprimento por $320cm$ de largura deve ser coberta com azulejos quadrados. Se deseja-se utilizar a menor quantidade possível de azulejos, qual deve ser a medida inteira, em centímetros, do seu lado? (Deve ser desprezada a espessura do rejunte)

Exercício 13. Três asteróides passaram pela Terra em 2016, sendo que Arkanoide passa de 32 em 32 anos; Bumeroide passa de 48 em 48 anos; e Clivonoide passa de 56 em 56 anos. Qual será o próximo ano que os três passarão novamente pela Terra?

Exercício 14. Seja K o menor número natural tal que $\frac{K}{2}$, $\frac{K}{3}$, $\frac{K}{4}$ e $\frac{K}{5}$ sejam números naturais. A soma dos algarismos de K é:

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de $540cm$, 30 de $810cm$ e 10 de $1080cm$, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em peças de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que $2m$. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

a) 105 peças.

b) 120 peças.

c) 210 peças.

d) 243 peças.

e) 420 peças.

Exercício 16. Da rodoviária da cidade de Alegrelândia, saem ônibus de 75 em 75 minutos para a cidade de Vila Feliz e de 2 em 2 horas com destino à cidade de Boa Esperança.

Em um determinado dia, às 8 horas da manhã, dois ônibus saem juntos, um para cada cidade. Qual é a diferença entre o número de viagens realizadas para Vila Feliz e para Boa Esperança até o próximo horário em que dois ônibus sairão juntos novamente da rodoviária de Alegrelândia, um para cada cidade?

a) 3.

b) 5.

c) 6.

d) 8.

e) 9.

Exercício 17. D. Laura quer decorar a maior quantidade possível de caixas com fitas azuis, brancas e vermelhas. Para decorar uma caixa, D. Laura utiliza 2 pedaços de fita azul, 4 pedaços de fita branca e 5 pedaços de fita vermelha, sendo que todos esses pedaços têm o mesmo tamanho. No momento, D. Laura dispõe de 28 metros de fita azul, 48 metros de fita branca e 60 metros de fita vermelha, que serão cortados em pedaços com o maior tamanho possível, de modo que não haja sobra. Com essas quantidades de fitas, pode-se afirmar que D. Laura poderá decorar a maior quantidade possível de caixas e sobrará(ão) apenas fita(s):

a) branca.

b) vermelha.

c) azul.

d) branca e vermelha.

e) azul e branca.

Exercício 18. Cristina vai comemorar o aniversário de 5 anos de seu filho, Pedro, com uma festinha na escola dele. Para montar as sacolinhas surpresa, que as crianças levam para casa, Cristina, que é dona de uma papelaria, colocará os seguintes materiais escolares: lápis, borrachas, apontadores e cartelas de adesivos. Ela verificou que dispunha, em sua papelaria, de 156 lápis, 130 borrachas, 78 apontadores e 52 cartelas de adesivos. Sabendo-se que foi utilizado todo o material disponível, e que foi feito o maior número possível de sacolinhas, todas com a mesma quantidade de material, pode-se afirmar que, em cada sacolinha, a quantidade de:

a) cartelas de adesivos é igual a um quarto da quantidade de lápis.

b) borrachas é igual à quantidade de apontadores mais uma unidade.

c) lápis é igual ao dobro da quantidade de apontadores.

d) apontadores é igual à quantidade de cartelas de adesivos mais duas uniades.

e) cartelas de adesivos é igual à metade da quantidade de borrachas.

Exercício 19. Determinar o menor número que dividido por 24, 30 e 45, deixa resto 11, 17 e 32 respectivamente.

Exercício 20. Determine o maior número pelo qual se deve dividir 1207 e 803 para obtermos os restos 7 e 3, respectivamente.

Respostas e Soluções.

1.

a) 3.

$$\begin{array}{cc|l} 12, & 15 & 3 \\ 4, & 5 & \\ \hline & & \boxed{3}. \end{array}$$

b) 12.

$$\begin{array}{cc|l} 60, & 72 & 2 \\ 30, & 36 & 2 \\ 15, & 18 & 3 \\ 5, & 6 & \\ \hline & & \boxed{2^2 \cdot 3 = 12}. \end{array}$$

c) 60.

$$\begin{array}{cc|l} 120, & 180 & 2 \\ 60, & 90 & 2 \\ 30, & 45 & 3 \\ 10, & 15 & 5 \\ 2, & 3 & \\ \hline & & \boxed{2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60}. \end{array}$$

2.

a) 90.

$$\begin{array}{ccc|l} 6, & 9, & 15 & 2 \\ 3, & 9, & 15 & 3 \\ 1, & 3, & 5 & 3 \\ 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \\ \hline & & & \boxed{2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90} \end{array}$$

b) 84.

$$\begin{array}{cc|l} 12, & 21 & 2 \\ 6, & 21 & 2 \\ 3, & 21 & 3 \\ 1, & 7 & 7 \\ 1, & 1 & \\ \hline & & \boxed{2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84} \end{array}$$

c) 900.

$$\begin{array}{ccc|l} 45, & 60, & 75 & 2 \\ 45, & 30, & 75 & 2 \\ 45, & 15, & 75 & 3 \\ 15, & 5, & 25 & 3 \\ 5, & 5, & 25 & 5 \\ 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \\ \hline & & & \boxed{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900} \end{array}$$

3. Se as quantidades de flores de cada cor deve ser a mesma, então essa quantidade deve ser um divisor do número total de cada tipo de flores. Como a quantidade de arranjos deve ser a menor possível, devemos calcular o máximo divisor comum entre as quantidades de flores:

$$\begin{array}{ccc|l} 48, & 60, & 72 & 2 \\ 24, & 30, & 36 & 2 \\ 12, & 15, & 18 & 3 \\ 4, & 5, & 6 & \\ \hline & & & \boxed{2^2 \cdot 3} \end{array}$$

Portanto, serão $2^2 \cdot 3 = 12$ arranjos, cada um com 4 flores amarelas, 5 flores rosas e 6 flores vermelhas.

4. André completa voltas em tempos múltiplos de 36, Bruno em múltiplos de 40 e Carlos em múltiplos de 48. Eles passarão juntos pela largada nos múltiplos comuns aos três valores. Vamos calcular o menor desses múltiplos, ou seja, o mínimo múltiplo comum:

$$
\begin{array}{ccc|l}
36, & 40, & 48 & 2 \\
18, & 20, & 24 & 2 \\
9, & 10, & 12 & 2 \\
9, & 5, & 6 & 2 \\
9, & 5, & 3 & 3 \\
3, & 5, & 1 & 3 \\
1, & 5, & 1 & 5 \\
1, & 1, & 1 & \\
\hline
 & & & \boxed{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}
\end{array}
$$

Temos então que eles se encontrarão novamente na largada depois de $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ segundos, ou seja, depois de $12min$.

5. Vemos facilmente que 100 é fator comum aos três. Vamos procurar os demais:

$$
\begin{array}{ccc|l}
32, & 40, & 38 & 2 \\
16, & 20, & 19 & \\
\hline
 & & & \boxed{2}
\end{array}
$$

Temos então que o $MDC(3200, 4000, 3800) = 100 \cdot 2 = 200$.

6. O melhor denominador é o $MMC(2, 3, 4, 5)$, que é igual a:

$$
\begin{array}{cccc|l}
2, & 3, & 4, & 5 & 2 \\
1, & 3, & 2, & 5 & 2 \\
1, & 3, & 1, & 5 & 3 \\
1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1, & 1 & \\
\hline
 & & & & \boxed{2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60}
\end{array}
$$

7. Temos que $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Como $MDC(360, 2^a \cdot 3^b) = 12 = 2^2 \cdot 3$, então a quantidade de fatores 2, no número $2^a \cdot 3^b$, deve ser 2 e a quantidade de fatores 3 deve ser 1, ou seja, $a = 2$ e $b = 1$.

8. Vamos completar os cálculos com outras incógnitas:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 1 & 12 & \\
\hline
x & y & z & w & 10 & 0
\end{array}
$$

Temos então que $w = 12 \cdot 10 = 120$, $z = 1 \cdot w + 10 = 130$, $y = 2 \cdot z + w = 380$ e, por fim, $x = 1 \cdot y + z = 510$.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Basta calcularmos o MMC entre 6, 8 e 10:

$$
\begin{array}{ccc|l}
6, & 8, & 10 & 2 \\
3, & 4, & 5 & 2 \\
3, & 2, & 5 & 2 \\
3, & 1, & 5 & 3 \\
1, & 1, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1 & \\
\hline
 & & & \boxed{2^3 \cdot 3 \cdot 5}
\end{array}
$$

Portanto, elas darão plantão novamente depois de $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ dias.

10. Temos que $78 = 2 \cdot 39$ e $156 = 2^2 \cdot 39$. Para que $MMC(A, 78) = 156$, A deve ter o fator 2 examente 2 vezes e o fator 39 no máximo 1 vez. Então, os possíveis valores de A são dois: $2^2 = 4$ e $2^2 \cdot 39 = 156$.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Seja N a quantidade de ovos. Se N dividido por 3 deixa resto 2, então $N + 1$ é múltiplo de 3. Da mesma forma, temos que $N + 1$ é múltiplo de 5. O primeiro múltiplo comum entre 3 e 5 é 15. Então todos os múltiplos múltiplos de 15 serão múltiplos comuns de 3 e 5 e, para o intervalo de 50 a 60 o único múltiplo de 15 é 60, que é $N + 1$. Portanto o número de ovos no cesto era 59.

12. Basta calcularmos o MDC entre 600 e 320.

$$
\begin{array}{cc|l}
320, & 600 & 2 \\
160, & 300 & 2 \\
80, & 150 & 2 \\
40, & 75 & 5 \\
8, & 15 & \\
\hline
 & & \boxed{2^3 \cdot 5}
\end{array}
$$

Portanto, a medida inteira do lado do azulejo para utilizarmos a menor quantidade possível de azulejos é $2^3 \cdot 5 = 40cm$.

13. Os três passaram pela Terra nos múltiplos comuns de 32, 48 e 56. Como queremos o próximo ano depois da passagem em 2016, basta calcularmos o MMC destes valores:

$$\begin{array}{ccc|c}
32, & 48, & 56 & 2 \\
16, & 24, & 28 & 2 \\
8, & 12, & 14 & 2 \\
4, & 6, & 7 & 2 \\
2, & 3, & 7 & 2 \\
1, & 3, & 7 & 3 \\
1, & 1, & 7 & 7 \\
1, & 1, & 1 & \\
\hline
 & & & \boxed{2^5 \cdot 3 \cdot 7}
\end{array}$$

A próxima passagem ocorrerá $2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$ anos após a passagem de 2016, ou seja, em $2016 + 672 = 2688$.

14. K deve ser múltiplo simultâneo de 2, 3, 4 e 5. Temos então:

$$\begin{array}{cccc|c}
2, & 3, & 4, & 5 & 2 \\
1, & 3, & 2, & 5 & 2 \\
1, & 3, & 1, & 5 & 3 \\
1, & 1, & 1, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1, & 1 & \\
\hline
 & & & & \boxed{2^2 \cdot 3 \cdot 5}
\end{array}$$

Portanto $K = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Resposta C.

15. (Extraído do ENEM - 2015) Se as peças devem ter o maior tamanho possível, devemos encontrar o MDC entre 540, 810 e 1080. Como vemos facilmente que 10 é divisor comum, basta calcularmos os demais divisores comuns:

$$\begin{array}{ccc|c}
54, & 81, & 108 & 3 \\
18, & 27, & 36 & 3 \\
6, & 9, & 12 & 3 \\
2, & 3, & 4 & \\
\hline
 & & & \boxed{3^3}
\end{array}$$

Temos então que o $MDC(540, 810, 1080) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$, mas como as peças devem ter menos de $2m$, o segundo maior divisor é $5 \cdot 3^3 = 135$. Assim, o total de peças é $40 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 10 \cdot 8 = 420$. Resposta E.

16. (Extraído do Colégio Militar de Fortaleza - 2014) Calculando o MMC entre 75 e 120, temos:

$$\begin{array}{cc|c}
75, & 120 & 2 \\
75, & 60 & 2 \\
75, & 30 & 2 \\
75, & 15 & 3 \\
25, & 5 & 5 \\
5, & 1 & 5 \\
1, & 1 & \\
\hline
 & & \boxed{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}
\end{array}$$

Assim, a segunda saída simultânea ocorrerá depois de $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600min = 10h$, que ocorrerá às $8 + 10 = 18h$. O número de viagens realizadas nos trechos, neste intervalo, foram 8 (Vila Feliz) e 5 (Boa Esperança), cuja diferença é 3. Resposta A.

17. (Extraído do Colégio Militar de Fortaleza - 2014) O maior tamanho possível para as fitas, podemos encontrar calculando o MDC entre 28, 48 e 60:

$$\begin{array}{ccc|c}
28, & 48, & 60 & 2 \\
14, & 24, & 30 & 2 \\
7, & 12, & 15 & \\
\hline
 & & & \boxed{2^2}
\end{array}$$

Como o $MDC(28, 48, 60) = 4$, que será o comprimento, em metros, de cada pedaço de fita, teremos $\dfrac{28}{4} = 7$ pedaços de fita azul, $\frac{48}{4} = 12$ de fita branca e $\frac{60}{4} = 15$ de fita vermelha. Com essas quantidades, D. Laura conseguirá decorar um máximo de 3 caixas, sobrando apenas 1 pedaço de fita azul. Resposta C.

18. (Extraído do Colégio Militar de Brasília - 2015) Para maior quantidade de sacolas, precisamos calcular o MDC entre as quantidades de cada brinde:

$$\begin{array}{cccc|c}
156, & 130, & 78, & 52 & 2 \\
78, & 65, & 39, & 26 & 13 \\
6, & 5, & 3 & 2 & \\
\hline
 & & & & \boxed{2 \cdot 39}
\end{array}$$

Assim, serão $2 \cdot 13 = 26$ sacolas, cada uma com 6 lápis, 5 borrachas, 3 apontadores e 2 cartelas de adesivos, ou seja, a quantidade de lápis é igual ao dobro da quantidade de apontadores. Resposta C.

19. Seja N um número que dividido por 24, 30 e 45, deixa resto 11, 17 e 32 respectivamente. Temos então:

$$\begin{cases} N = 24k + 11 \\ N = 30m + 17 \\ N = 45n + 32, \end{cases}$$

onde k, m e n são números naturais. Melhorando o sistema, chegamos a: $\begin{cases} N + 13 = 24k + 24 \\ N + 13 = 30m + 30 \\ N + 13 = 45n + 45. \end{cases}$

Temos então que $N + 13$ é múltiplo de 24, 30 e 45, sendo que o menor destes múltiplos é $MMC(24, 30, 45) = 360$. Por fim, temos $N = 347$.

20. Sejam n, p e q números naturais, temos:

$$\begin{cases} 1207 = nq + 7 \\ 803 = np + 3. \end{cases}$$

Assim, $nq = 1200$, ou seja, n é divisor de 1200 e $np = 800$, ou seja, n também é divisor de 800. Como queremos o maior valor possível para n, temos $n = MDC(800, 1200) = 400$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com