Módulo de Princípios Básicos de Contagem

Permutação simples

Segundo ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Permutação Simples

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. De quantas formas se pode dispor quatro pessoas em fila indiana?

Exercício 2. Quantos são os anagramas da palavra MATRIZ?

Exercício 3. Luiz precisa trocar a lâmpada da sala, lavar a louça, estudar para a prova de matemática e arrumar seu quarto. De quantas maneiras diferentes ele pode executar essa sequência de atividades?

Exercício 4. Com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5,$ quantos números de 5 algarismos podemos formar, sem repeti-los?

Exercício 5. Escreva todos os anagramas com as letras da palavra BOLA que começam com a letra L.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Considerando a palavra MATRIZ, determine o número de anagramas que:

a) começam por MA.

b) tenham as letras M e A juntas, nessa ordem.

c) tenhas as letras M e A juntas.

Exercício 7. Considere a palavra CONTAGEM. Determine o número de anagramas que

a) começam com A e terminam com E.

b) começam com A ou terminam com E.

c) começam e terminam com vogal.

d) têm a letra T antes da letra M (por exemplo, a própria palavra CONTAGEM).

Comentário para professores:. Esse é um bom momento para sugestionar em sala que identificar as seguintes estruturas pode simplificar os problemas:

i) Bloco Rígido: agrupamento de símbolos sem permutação entre as respectivas posições.

ii) Bloco: agrupamento de símbolos com permutação entre as respectivas posições.

Exercício 8. Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais não aparecem todas juntas?

Exercício 9. De quantas maneiras três homens e três mulheres podem ficar em fila, de modo que os homens fiquem intercalados pelas mulheres?

Exercício 10. Três ingleses, quatro americanos e cinco franceses serão dispostos em fila (dispostos em linha reta) de modo que pessoas de mesma nacionalidade estejam sempre juntas. De quantas maneiras distintas a fila poderá ser formada de modo que o primeiro da fila seja um francês?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito no computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e em nenhum deles aparecem dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver o número 75913 é

a) 24.

b) 31.

c) 32.

d) 88.

e) 89.

Exercício 12. Com os algarismos $2, 3, 4, 5, 6$ formam-se todos os números de 5 algarismos distintos. Determine a soma de todos eles.

Exercício 13. Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família SOUZA, o casal LÚCIA e MAURO e mais quatro pessoas. Além disso, a família SOUZA quer ocupar um mesmo banco e LÚCIA e MAURO querem sentar-se lado a lado. Nessas condições, o número de maneiras de se dispor as nove pessoas na lotação é igual a

a) 928.

b) 1152.

c) 1828.

d) 2412.

e) 3456.

Exercício 14. Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6,$ nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144.

b) 180.

c) 240.

d) 288.

e) 360.

Exercício 15. Dos anagramas da palavra CASTELO, quantos têm as vogais em ordem alfabética e juntas?

a) 180.

b) 144.

c) 120.

d) 720.

e) 360.

Exercício 16.

a) Mostre uma maneira de separar todos os números de 1 a 16 em quatro conjuntos com quatro números cada, de modo que cada conjunto tenha mesma soma.

b) Mostre que existem pelo menos 1024 maneiras de escrever os números de 1 até 16 em cada uma das casinhas de um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números de cada linha seja igual.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. (Extraído da Vídeo Aula) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

2. (Extraído da Vídeo Aula) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot = 720$.

3. Como são quatro atividades e ele deverá executar todas elas, temos uma permutação de quatro elementos, ou seja, $P_4 = 4! = 24$ maneiras diferentes.

4. $P_5 = 5! = 120$.

5. LABO, LAOB, LBAO, LBOA, LOAB, LOBA.

2 Exercícios de Fixação

6. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Se começam por MA, resta apenas permutar as outras 4 letras, ou seja, $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

b) Se duas letras devem estar juntas e em uma determinada ordem, consideramo-nas como um bloco, ou seja, $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

c) Parecido com o item anterior, porém como não existe uma ordem específica para as letras que ficam juntas, elas devem ser permutadas dentro do bloco. Sendo assim, o número de anagramas é $P_5 \cdot P_2 = 5! \cdot 2! = 240$.

7. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Resta permutar as outras 6 letras. Segue que o número de anagramas é $P_6 = 6! = 720$

b) Vamos contar a quantidade de anagramas que começam com A, somado à quantidade de anagramas que terminam com E. Como os anagramas que começam com A e terminam com E foram contados duas vezes, subtraímo-no do resultado. Temos então $P_7 + P_7 - P_6 = 7! + 7! - 6! = 10080 - 720 = 9360$.

c) Como deve terminar e começar com vogal e são 3 vogais para 2 espaços, segue que é $3 \cdot 2 = 6$ o número de maneiras de organizá-las. Agora, basta permutar as demais. Temos então $6 \cdot P_6 = 6 \cdot 720 = 4320$ anagramas.

d) Basta pensar que a letra T fica antes da letra M em metade dos anagramas, ou seja, $\dfrac{P_8}{2} = 20.160$ anagramas.

Comentário para professores:. Esse é um bom momento para sugestionar em sala que identificar as seguintes estruturas pode simplificar os problemas:

i) Bloco Rígido: agrupamento de símbolos sem permutação entre as respectivas posições.

ii) Bloco: agrupamento de símbolos com permutação entre as respectivas posições.

8. (Extraído da Vídeo Aula) Basta subtrair, do total, a quantidade de anagramas nos quais as vogais aparecem todas juntas, ou seja, $P_6 - P_3 \cdot P_4 = 6! - 3!4! = 576$ anagramas.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Como a fila pode começar com homem ou mulher e para ambos os casos a quantidade de filas é a mesma, teremos $2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ filas diferentes.

10. (Extraído da UFF - Extraído da Vídeo Aula) Seja F o grupo formado por franceses, A, o de americanos e I, o de ingleses, teremos dois tipos de filas: FAI e FIA, ou seja, $2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = 34.560$ possibilidades.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

11. (ENEM - Extraído da Vídeo Aula) Todas as pessoas cujas senhas iniciam por 1, serão chamadas antes, ou seja, $4! = 24$ pessoas. O mesmo ocorre com as pessoas cujas senhas começam por 3 (24 pessoas) e 5 (24 pessoas). Das senhas que começam com 7, apenas as que tem, na sequência, 1 (6 senhas), 3 (6 senhas), 51 (2 senhas), 53 (2 senhas), são chamadas antes. Portanto, são $24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 = 88$ pessoas chamadas antes de quem possuir a senha 75913, ou seja, será o 89^o a ser chamado. Resposta E.

12. (Extraído da Vídeo Aula) O total de parcelas desta soma é $P_5 = 120$. Cada um dos 5 algarismos aparece $\dfrac{120}{5} = 24$ vezes em cada uma das cinco posições. Somando apenas as unidades, teremos $24(2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 480$. Assim, a soma de todas as parcelas é $480 + 480 \cdot 10 + 480 \cdot 10^2 + 480 \cdot 10^3 + 480 \cdot 10^4 = 5.333.280$.

13. (FUVEST - Extraído da Vídeo Aula) Acomodando inicialmente a família SOUZA, temos $3 \cdot 3! = 18$ possibilidades. Agora, o casal poderá escolher entre os dois bancos restantes e, para cada banco são 4 possibilidades, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$ possibilidades. Por fim, as quatro pessoas restantes em quatro lugares: $4! = 24$. Portanto, o total de possibilidades é $18 \cdot 8 \cdot 24 = 3.456$. Resposta E.

14. (ITA) O total de números nos quais 3 e 4 ocupam posições adjacentes é $2P_5 = 2 \cdot 5! = 240$. Basta agora subtrair os números em que 1 e 2 ocupam posições adjacentes, que são $2 \cdot 2 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 96$. Assim temos $240 - 96 = 144$ números. Resposta A.

15. (PUC - PR) Como são três vogais, consideramo-nas como um bloco rígido, passando a ter 5 letras. Assim o total de anagramas é $P_5 = 120$. Resposta C.

16. (Extraído do Banco de Problemas da OBMEP)

a) Primeiramente formemos oito pares de números escolhendo números opostos ao "meio" da sequência, ou seja, $(1, 16)$, $(2, 15)$, $\ldots$, $(7, 10)$ e $(8, 9)$. Veja que cada par possui soma 17. Agora junte os pares em quatro grupos, cada um com soma 34, por exemplo: $(1, 16, 2, 15)$, $(3, 14, 4, 13)$, $(5, 12, 6, 11)$ e $(7, 10, 8, 9)$.

b) Veja que os números obtidos no item anterior fornecem um exemplo de como colocar os números em cada linha. Vamos mostrar que temos pelo menos 1024 variações distintas desse exemplo. Em cada linha podemos "girar"os números quatro vezes para a esquerda obtendo as sequências: $(1, 16, 2, 15)$, $(16, 2, 15, 1)$, $(2, 15, 1, 16)$ e $(15, 1, 16, 2)$. Além disso, podemos "girar" as linhas quatro vezes de cima para baixo. Então, apenas rodando o "exemplo" contruído, temos pelo menos 4 variações dentro de cada linha e mais outras 4 para rotações entre as linhas. Assim, no total teremos

$$\underbrace{(4 \times 4 \times 4 \times 4)}_{giros\ dentro\ das\ linhas} \times \underbrace{4}_{giros\ entre\ as\ linhas} = 1024$$

maneiras de realizar esta tarefa. A figura abaixo mostra alguns exemplos de tabuleiros que podem ser obtidos pelas operações de rotações descritas:

1	16	2	15
3	14	4	13
5	12	6	11
7	10	8	9

16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5
10	8	9	7

10	8	9	7
16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com