Inequações Mistas e Sistemas

Sistemas de Inequações Quadráticas

1° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Inequações Mistas e Sistemas
Sistemas de Inequações Quadráticas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações simultâneas.

a) $2 < x^2 - 14 < 5x$

b) $x^2 + 3 < 2x^2 - 2 \leq -3x$

c) $0 \leq x^2 - 5x + 10 \leq 6$

d) $3x + 1 \leq x^2 + x - 7 < x + 2$

e) $-x^2 + 3x + 2 < 3x^2 + x < x^2 + 3$

Exercício 2. Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x^2 > 1 - 2x \\ 2x < x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 \leq 10 - 3x \\ x^2 > 5x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \leq 0 \\ 3x^2 - 6x + 3 \leq 0 \end{cases}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 3. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações simultâneas.

$$-2 \leq \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - 3} \leq 1$$

Exercício 4. Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + x + 1} \leq -2 \\ x^2 - 3x - 1 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 < 0 \\ (2x^2 - 1)(x + x^2) \geq 0 \end{cases}$

Exercício 5. Obtenha o maior domínio possível D para a função

$$f(t) = \frac{\sqrt{1 - 3t^2} + \sqrt{1 + 3t^2}}{\sqrt{1 - 2t^2}}.$$

Exercício 6. Determine o conjunto de valores reais de x para os quais os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = 3x^2 + 4x + 1$ estão acima do eixo das abscissas.

Exercício 7. Considere as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 - x}{3x + 1}, \quad x \neq -1/3 \\ g(x) &= \frac{2}{1 - 3x}, \quad x \neq 1/3 \\ h(x) &= 2 - x. \end{aligned}$$

Determine os valores reais de x para os quais o gráfico de f está abaixo do de g e o gráfico de g está abaixo do de h.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Seja

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - (2m + 1)}{\sqrt{x^2 + 2mx + 2}}.$$

Para quais valores de $m \in \mathbb{Z}$, f está definida e é não negativa para todo x em $\mathbb{R}$?

Exercício 9. Para quais valores reais de a vale que

$$-1 < \frac{x^2 - x - 2a}{-2x^2 + x - 3} \leq 3$$

para todo x real?

Exercício 10. Determine $a \in \mathbb{Z}$ para que se tenha

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

para todo x real.

Exercício 11. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 < 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$

Exercício 12. Resolva o sistema para $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y^2 - 3 \geq 0 \\ 16y^4 - 96y^2 \geq 0. \end{cases}$$

Exercício 13. Encontre todos os valores de α que fazem o sistema ter uma única solução.

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leq 0. \end{cases}$$

Respostas e Soluções.

1. a) As inequações simultâneas são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} 2 < x^2 - 14 \\ x^2 - 14 < 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 > 0 \quad (I) \\ x^2 - 5x - 14 < 0 \quad (II). \end{cases}$$

Resolvendo as inequações quadráticas (I) e (II), temos conjuntos solução $S_1 =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$ e $S_2 =]-2, 7[$, respectivamente. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 =]4, 7[$.

b) As inequações simultâneas são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} x^2 + 3 < 2x^2 - 2 \\ 2x^2 - 2 \leq -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5 < 0 \quad (I) \\ 2x^2 + 3x - 2 \leq 0 \quad (II). \end{cases}$$

Resolvendo as inequações quadráticas (I) e (II), temos conjuntos solução $S_1 =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$ e $S_2 =]-2, 1/2[$, respectivamente. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

c) As inequações simultâneas são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 - 5x + 10 \\ x^2 - 5x + 10 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 10 \geq 0 \quad (I) \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \quad (II). \end{cases}$$

Resolvendo as inequações quadráticas (I) e (II), temos conjuntos solução $S_1 = \mathbb{R}$ e $S_2 = [1, 4]$, respectivamente. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 = S_2 = [1, 4]$.

d) As inequações simultâneas são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} 3x + 1 \leq x^2 + x - 7 \\ x^2 + x - 7 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \leq 0 \quad (I) \\ x^2 - 9 < 0 \quad (II). \end{cases}$$

Resolvendo as inequações quadráticas (I) e (II), temos conjuntos solução $S_1 =]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$ e $S_2 =]-3, 3[$, respectivamente. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 =]-3, -2]$.

e) As inequações simultâneas são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 2 < 3x^2 + x \\ 3x^2 + x < x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 2x + 2 < 0 \quad (I) \\ 2x^2 + x - 3 < 0 \quad (II). \end{cases}$$

Resolvendo as inequações quadráticas (I) e (II), temos conjuntos solução $S_1 =]-\infty, -1/2[\cup]1, +\infty[$ e $S_2 =]-3/2, 1[$, respectivamente. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 =]-3/2, -1/2[$.

2. a) A inequação quadrática $x^2 + 2x - 1 > 0$ tem conjunto solução $S_1 =]-\infty, -1-\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2}, +\infty[$ e a inequação quadrática $2x - x^2 < 0$ tem conjunto solução $S_2 =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, -1-\sqrt{2}[\cup]2, +\infty[$.

b) A inequação quadrática $x^2 + 3x - 10 \leq 0$ tem conjunto solução $S_1 = [-5, 2]$ e a inequação quadrática $x^2 - 5x + 4 > 0$ tem conjunto solução $S_2 =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 = [-5, 1[$.

c) A inequação quadrática $-2x^2 - x + 1 \leq 0$ tem conjunto solução $S_1 =]-\infty, -1] \cup [1/2, +\infty[$ e a inequação quadrática $3x^2 - 6x + 3 \leq 0$ tem conjunto solução $S_2 = \{1\}$. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 = \{1\}$.

3. As inequações simultâneas são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 - 3} \geq -2 \\ \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 - 3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 3} \geq 0 \quad (I) \\ \dfrac{-x + 7}{x^2 - 3} \leq 0 \quad (II). \end{cases}$$

Resolvendo as inequações quociente (I) e (II), temos conjuntos solução $S_1 =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup[-2/3, 1]\cup]\sqrt{3}, +\infty[$ e $S_2 =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, respectivamente. Logo, o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 = [-2/3, 1]\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

4. a)

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + x + 1} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{5x^2 + 5}{2x^2 + x + 1} \leq 0.$$

As funções $f(x) = 5x^2 + 5$ e $g(x) = 2x^2 + x + 1$ são positivas para todo x, logo também é seu quociente. Assim, o conjunto solução S_1 dessa inequação é vazio. Denotando S_2 o conjunto solução da outra inequação, temos que o conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset \cap S_2 = \emptyset$.

b) A inequação $(2x^2 - 1)(x + x^2) \geq 0$ tem conjunto solução $S_1 =]-\infty, -1] \cup [-\sqrt{2}/2, 0] \cup [\sqrt{2}/2, +\infty[$. A inequação $4x^2 - 3x - 1 < 0$ tem conjunto solução $S_2 =]-1/4, 1[$. O conjunto solução do sistema é $S = S_1 \cap S_2 =]-1/4, 0] \cup [\sqrt{2}/2, 1[$.

5. O radicando de uma raiz quadrada deve ser não negativo e o denominador de uma fração deve ser não nulo. Assim, deve valer o sistema

$$\begin{cases} 1 - 3t^2 \geq 0 \quad (I) \\ 1 + 3t^2 \geq 0 \quad (II) \\ 1 - 2t^2 > 0 \quad (III). \end{cases}$$

A inequação (I) tem solução $S_1 = [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}]$, a inequação (II) tem solução $S_2 = \mathbb{R}$ e a (III) tem solução $S_3 =]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2[$. O maior domínio possível é $D = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = S_1 \cap S_3 = [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}]$.

6. Para os gráficos das funções estarem acima do eixo das abscissas, seus valores devem ser positivos para todo x, isto é,

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 > 0 \\ g(x) = 3x^2 + 4x + 1 > 0. \end{cases}$$

Analisando os sinais das funções, $f(x) > 0$ para todo $x \neq 1$, e $g(x) > 0$ para $x < -1$ ou $x > -1/3$. Assim, f e g são positivas para todo x em $\{x \in \mathbb{R}; x < -1 \quad ou \quad x > -1/3 \quad e \quad x \neq 1\}$.

7. Devemos ter $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo x.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \frac{2-x}{3x+1} < \frac{2}{1-3x} \Leftrightarrow \frac{3x^2-13x}{1-9x^2} < 0,$$

que tem solução $S_1 =]-\infty, -1/3[\cup]0, 1/3[\cup]13/3, +\infty[$.
Também,

$$g(x) < h(x) \Leftrightarrow \frac{2}{1-3x} < 2-x \Leftrightarrow \frac{-3x^2+7x}{1-3x} < 0,$$

que tem solução $S_2 =]-\infty, 0[\cup]1/3, 7/3[$.
Como as duas inequações devem valer simultâneamente, $S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, -1/3[$.

8. Para f estar bem definida devemos ter o radicando não negativo, e, como está no denominador, também deve ser não nulo. Assim, $x^2+2mx+2 > 0$ para todo x. Como o denominador é sempre positivo, para f ser não negativa, basta $x^2+2x-(2m+1) \geq 0$ para todo x. Em resumo, temos

$$\begin{cases} x^2+2mx+2 > 0 & \forall x \\ x^2+2x-(2m+1) \geq 0 & \forall x. \end{cases}$$

A função $x^2+2mx+2 > 0$ para todo x, se $\Delta = 4m^2-8 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. A função $x^2+2x-(2m+1) \geq 0$ para todo x, se $\Delta = 8m+8 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$. Daí, temos $-\sqrt{2} < m \leq -1$. Como $m \in \mathbb{Z}$, então $m = -1$.

9. Deve valer

$$-1 < \frac{x^2-x-2a}{-2x^2+x-3} \quad e \quad \frac{x^2-x-2a}{-2x^2+x-3} \leq 3.$$

Da primeira inequação,

$$-1 < \frac{x^2-x-2a}{-2x^2+x-3} \Leftrightarrow \frac{-x^2-2a-3}{-2x^2+x-3} > 0$$

A função $g(x) = -2x^2+x-3$ tem $\Delta < 0$ e $a = -2 < 0$, logo é negativa para todo x. Então devemos exigir $f(x) = -x^2-2a-3 < 0$ para todo x. Como $a = -1 < 0$, devemos ter $\Delta = 4(-2a-3) < 0 \Leftrightarrow a > -3/2$.

Da segunda inequação,

$$\frac{x^2-x-2a}{-2x^2+x-3} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{7x^2-4x-2a+9}{-2x^2+x-3} \leq 0$$

Já vimos que a função $g(x) = -2x^2+x-3$ é negativa para todo x. Então devemos exigir que $f(x) = 7x^2-4x-2a+9 \geq 0$ para todo x. Como $a = 7 > 0$, devemos ter $\Delta = 16-28(-2a+9) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 59/14$.

Das duas inequações, $-3/2 < a \leq 59/14$.

10. Deve valer

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \quad e \quad \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2.$$

Da primeira inequação,

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \Leftrightarrow \frac{-x^2+(a+2)x-4}{x^2-x+1} < 0.$$

A função $g(x) = x^2-x+1$ tem $\Delta < 0$ e $a = 1 > 0$, logo é positiva para todo x. Então devemos exigir $f(x) = -x^2+(a+2)x-4 < 0$ para todo x. Como $a = -1 < 0$, devemos ter $\Delta = (a+2)^2-16 < 0 \Leftrightarrow -6 < a < 2$.

Da segunda inequação,

$$\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{4x^2+(a-3)x+1}{x^2-x+1} > 0.$$

Já vimos que a função $g(x) = x^2-x+1$ é positiva para todo x. Então devemos exigir que $f(x) = 4x^2+(a-3)x+1 > 0$ para todo x. Como $a = 4 > 0$, devemos ter $\Delta = (a-3)^2-16 < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 7$.

Das duas inequações, $-1 < a < 2$. Como $a \in \mathbb{Z}$, então $a = 0$ ou $a = 1$.

11. a) Fazendo a transformação $z = x^2$, temos

$$z^2-3z-4 < 0 \Rightarrow -1 < z < 4.$$

Como $z = x^2$,

$$-1 < x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^2 \\ x^2 < 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2-4 < 0. \end{cases},$$

que tem como solução $S =]-2, 2[$.

b) Fazendo a transformação $z = x^2$, temos

$$z^2-5z+4 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq z \leq 4.$$

Como $z = x^2$,

$$1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2 \\ x^2 \leq 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-4 \leq 0. \end{cases},$$

que tem como solução $S =]-2, -1] \cup [1, 2[$.

12. A inequação $y^2-3 \geq 0$ tem solução $y \leq -\sqrt{3}$ ou $y \geq \sqrt{3}$. Da segunda inequação,

$$16y^4-96y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 16y^2(y^2-6) \geq 0 \Leftrightarrow y^2-6 \geq 0,$$

já que $y^2 \geq 0$ e $y \neq 0$ pela solução da primeira inequação.

$$y^2-6 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -\sqrt{6} \quad ou \quad y \geq \sqrt{6}.$$

Assim, temos

$$(y \leq -\sqrt{3} \quad ou \quad y \geq \sqrt{3}) \quad e \quad (y \leq -\sqrt{6} \quad ou \quad y \geq \sqrt{6}).$$

Segue que $S = \{x \in \mathbb{R}; y \leq -\sqrt{6} \quad ou \quad y \geq \sqrt{6}\}$.

13. Note que os gráficos das funções nas duas inequações são parábolas com as concavidades voltadas para cima. Assim, se o sistema tem solução, as duas funções têm ao menos uma raiz. Temos três casos possíveis (faça esboços para visualizar):

1. As duas têm uma única raiz. Nesse caso, as duas parábolas devem ter o mesmo vértice e a coordenada x do vértice é a solução do sistema. Calculando os vértices vemos que isto não acontece.

2. Uma tem uma única raiz, digamos b, e a outra tem duas raízes distintas, digamos c e d, $c < d$. Nesse caso, a solução deve ser $x = b$ (única solução de uma das inequações) e b deve pertencer ao intervalo $[c, d]$ (solução da outra inequação), ou simplesmente, $x = b$ deve satisfazer a outra inequação.

   $x^2 + 2x + \alpha = (x - b)^2 \Rightarrow b = -1 \quad e \quad \alpha = 1.$
   $x^2 - 4x - 6\alpha = (-1)^2 - 4(-1) - 6.1 = -1 < 0,$

   logo $x = -1$, que é a única solução da primeira inequação, é uma solução da segunda inequação, e $\alpha = 1$ satisfaz o problema.

   $x^2 - 4x - 6\alpha = (x - b)^2 \Rightarrow b = 2 \quad e \quad \alpha = -2/3.$
   $x^2 + 2x + \alpha = 2^2 + 2.2 - 2/3 > 0,$

   logo $x = 2$, que é a única solução da primeira inequação, não é uma solução da segunda inequação. Então esse valor de α não funciona.

3. As duas têm duas raízes distintas. Nessa caso, a única chance de ter uma única solução para o sistema é que a maior raiz de uma seja a menor raiz da outra. Assim, podemos escrever

$$x^2 + 2x + \alpha = (x - b)(x - c)$$
$$x^2 - 4x - 6\alpha = (x - b)(x - d).$$

   Com $c \leq b \leq d$ ou $d \leq b \leq c$. Aqui temos quatro equações para as incógnitas α, b, c, d, e a única solução nos dá $\alpha = 0$.

Resumindo, $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

Material elaborado por Lorena Bulhosa