Módulo Elementos Básicos de Geometria - Parte 3

Diagonais de Polígonos.

8° ano/E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Elementos Básicos de Geometria - Parte 3.
Diagonais de Polígonos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o número de diagonais de um hexágono convexo.

Exercício 2. Quantas diagonais partem de cada vértice de um octógono convexo?

Exercício 3. Em uma região existem 10 cidades, todas sobre uma circunferência imaginária. Deseja-se construir estradas em linha reta ligando todos estas cidades entre si. Quantas serão as estradas?

Exercício 4. Qual polígono convexo possui 5 diagonais?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Determine o polígono convexo cujo número de diagonais é o dobro do número de lados.

Exercício 6. Qual a soma dos ângulo internos de um polígono convexo que tem número de diagonais igual ao número de lados?

Exercício 7. Determine o número de diagonais de um polígono regular que possui ângulos externos medindo 30°.

Exercício 8. O número de lados de dois polígonos convexos são dois números consecutivos. Se a diferença entre o número de diagonais é 8, quais são esses polígonos?

Exercício 9. Quantas diagonais tem um polígono regular cuja medida do ângulo interno é o quádruplo da medida do ângulo externo?

Exercício 10. Qual o número de diagonais de um polígono convexo que tem soma dos ângulos internos igual a 1800°?

Exercício 11. Quantas são as diagonais de um polígono regular de 16 lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita?

Exercício 12. Existe um polígono convexo cujo número de diagonais é o triplo do número de lados?

Exercício 13. Seja um octógono convexo $ABCDEFGH$. Quantas são as diagonais que não contêm os vértices A nem D?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total do número de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 63.

b) 65.

c) 66.

d) 70.

e) 77.

Exercício 15. Unindo-se três a três os vértices de um polígono regular, obtém-se 220 triângulos. Quantas diagonais possui esse polígono?

Exercício 16. A diferença entre o número de diagonais de dois polígonos convexos é 85 e o número de lados de um é o triplo do número de lados do outro. Quais são estes polígonos?

Exercício 17. A soma do número de diagonais de dois polígonos convexos é 142 e a diferença entre o número de lados é 1. Quantos lados têm estes polígonos?

Respostas e Soluções.

1. $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9.$

2. Como um octógono possui 8 vértices e cada vértice se liga, através de uma diagonal, com todos os outros menos com ele mesmo e com seus dois "vizinhos", então este valor é $8 - 3 = 5$.

3. Estas cidades formam um decágono convexo. Assim o total de estradas para ligá-las duas a duas é o número de diagonais deste decágono mais o número de lados, ou seja, $\dfrac{10(10-3)}{2} + 10 = 35 + 10 = 45$ estradas.

4. Temos $\dfrac{n(n-3)}{2} = 5$, segue que $n(n-3) = 10$. Como precisamos de um número natural para a solução, então $n = 5$, ou seja, o polígono é um pentágono.

5.

$$\begin{aligned} d &= 2n \\ \frac{n(n-3)}{2} &= 2n \\ n(n-3) &= 4n \\ n^2 - 3n - 4n &= 0 \\ n^2 - 7n &= 0 \\ n(n-7) &= 0. \end{aligned}$$

Como a quantidade de lados deve ser um número natural, temos $n = 7$, ou seja, o polígono é um heptágono.

6.

$$\begin{aligned} d &= n \\ \frac{n(n-3)}{2} &= n \\ n(n-3) &= 2n \\ n^2 - 3n - 2n &= 0 \\ n^2 - 5n &= 0 \\ n(n-5) &= 0. \end{aligned}$$

Como a quantidade de lados deve ser um número natural, temos $n = 5$. Daí, a soma dos ângulos internos é $(n-2)180^\circ = (5-2)180^\circ = 540^\circ$.

7. Se $\dfrac{360^\circ}{n} = 30^\circ$, então $n = 12$. Temos então que o número de diagonais é $\dfrac{12(12-3)}{2} = 54$.

8. Vamos chamar o número de lados destes polígonos de n e $n+1$. Como a diferença entre o número de diagonais é 8, temos:

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= 8 \\ \frac{(n+1)(n+1-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} &= 8 \\ (n+1)(n-2) - n(n-3) &= 16 \\ n^2 - 2n + n - 2 - n^2 + 3n &= 16 \\ 2n - 2 &= 16 \\ n &= 9. \end{aligned}$$

Portanto os polígonos são o eneágono e o decágono.

9.

$$\begin{aligned} a_i &= 4a_e \\ \frac{180^\circ(n-2)}{n} &= 4 \cdot \frac{360^\circ}{n} \\ 180^\circ(n-2) &= 1440^\circ \\ 180^\circ n &= 1440^\circ \\ n &= 8. \end{aligned}$$

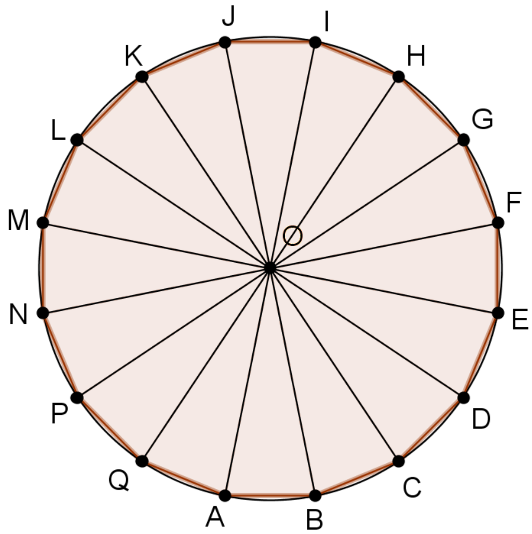
Como se trata do octógono, o número de diagonais é $\dfrac{8(8-3)}{2} = 20$.

10.

$$\begin{aligned} S_i &= 1800^\circ \\ 180^\circ(n-2) &= 1800^\circ \\ n-2 &= 10 \\ n &= 12. \end{aligned}$$

O número de diagonais do dodecágono convexo é $\dfrac{12(12-3)}{2} = 54$.

11. Ao todo, este polígono tem $\dfrac{16(16-3)}{2} = 104$ diagonais. Mas destas, $\dfrac{16}{2} = 8$ são também diâmetros da circunferência circunscrita, ou seja, a quantidade de diagonais que não passam pelo centro é $104 - 8 = 96$. Observe na figura as diagonais que passam pelo centro da circunferência.

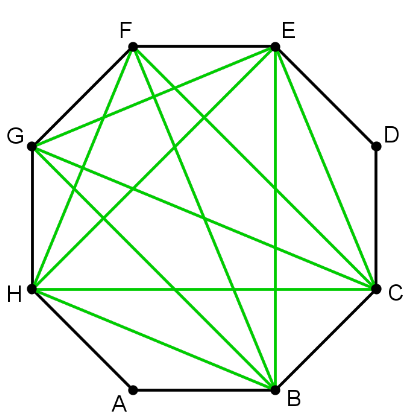


12.

$$\begin{aligned} d &= 3n \\ \frac{n(n-3)}{2} &= 3n \\ n(n-3) &= 6n \\ n^2 - 3n - 6n &= 0 \\ n^2 - 9n &= 0 \\ n(n-9) &= 0 \\ n_1 &= 0 \\ n_2 &= 9. \end{aligned}$$

Como a quantidade de lados deve ser um número natural, $n = 9$. Sendo assim, este polígono existe, é o eneágono, que possui 9 lados e $\dfrac{9(9-3)}{2} = 27$ diagonais.

13. O total de diagonais de um octógono convexo é $\dfrac{8(8-3)}{2} = 20$. Destas, $8 - 3 = 5$ partem do vértice A e a mesma quantidade do vértice D, mas não podemos nos esquecer que uma delas parte de A e de D. Assim, a quantidade de diagonais que não contêm os vértices A nem D é $20 - 5 - 5 + 1 = 11$.



14. (Extraído do ITA) Vamos chamar a quantidade de lados dos polígonos de n e $n + 6$. Temos então, já que a diferença entre o número de diagonais é 39:

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= 39 \\ \frac{(n+6)(n+6-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} &= 39 \\ (n+6)(n+3) - n(n-3) &= 78 \\ n^2 + 6n + 3n + 18 - n^2 + 3n &= 78 \\ 12n + 18 &= 78 \\ n &= 5. \end{aligned}$$

Então os polígonos são o pentágono, cujo número de diagonais é $\dfrac{5(5-3)}{2} = 5$, e o undecágono, cujo número de diagonais é $\dfrac{11(11-3)}{2} = 44$. Sendo assim, a soma pedida é $5 + 11 + 5 + 44 = 65$. Resposta B.

15. Inicialmente, veremos como se conta a quantidade de triângulos utilizando os vértices de um polígono convexo. Supondo que esse polígono possua n vértices, temos n opções para escolher o primeiro vértice; $n - 1$ opções para escolher o segundo vértice, já que o primeiro já foi escolhido e não pode ser escolhido novamente; e, pelo mesmo raciocínio, $n - 2$ opções de escolha para o terceiro vértice. Precisamos ainda resolver um problema, pois supondo que, um primeiro triângulo seja $\triangle ABC$, um segundo, $\triangle ACB$, um terceiro, $\triangle BAC$, um quarto, $\triangle BCA$, um quinto, $\triangle CAB$, e um sexto, $\triangle CBA$, trata-se do mesmo triângulo, ou seja, se multiplicarmos os três valores iniciais n, $n - 1$ e $n - 2$, estaremos contando todos os triângulos seis vezes. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} &= 220 \\ n(n-1)(n-2) &= 1320 \\ n(n-1)(n-2) &= 12 \cdot 11 \cdot 10 \\ n &= 12. \end{aligned}$$

Como se trata do dodecágono, seu número de diagonais é $\dfrac{12(12-3)}{2} = 54$.

16. Vamos chamar a quantidade de lados destes polígonos de n e $3n$. Como a diferença entre o número de diagonais é 85, temos:

$$\begin{aligned}
d_1 - d_2 &= 85\\
\frac{3n(3n-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} &= 85\\
9n^2 - 9n - n^2 + 3n &= 170\\
8n^2 - 6n &= 170\\
4n^2 - 3n &= 85\\
4n^2 - 3n + \frac{9}{16} &= 85 + \frac{9}{16}\\
(2n - \frac{3}{4})^2 &= \frac{1369}{16}\\
2n - \frac{3}{4} &= \pm\frac{37}{4}\\
n &= \frac{\pm 37 + 3}{8}.
\end{aligned}$$

Como n deve ser um número natural, $n = 5$, ou seja, os polígonos são o pentágono e o pentadecágono.

17. Se a diferença entre o número de lados é 1, vamos chamar as quantidades de lados de n e $n+1$. Temos então:

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 &= 142\\
\frac{(n+1)(n+1-3)}{2} + \frac{n(n-3)}{2} &= 142\\
(n+1)(n-2) + n(n-3) &= 284\\
n^2 - 2n + n - 2 + n^2 - 3n &= 284\\
2n^2 - 4n &= 286\\
n^2 - 2n &= 143\\
n(n-2) &= 13 \cdot 11\\
n &= 13.
\end{aligned}$$

Portanto os polígonos têm 13 e 14 lados.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com