Números Complexos – Forma Geométrica

Multiplicação e Divisão de números complexos no plano de Argand–Gauss

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Material elaborado por Letícia Mattos.

Números Complexos – Forma Geométrica
Multiplicação e Divisão de números complexos no plano de Argand–Gauss

1 Exercícios Introdutórios

Antes de tudo, vamos relembrar duas das mais importantes relações trigonométricas:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Exercício 1. Encontre as coordenadas do número complexo contido na circunferência unitária cujo argumento (em radianos) é igual a

(a) $\dfrac{2\pi}{3}$

(b) $\dfrac{5\pi}{12}$

(c) $\dfrac{7\pi}{12}$

Exercício 2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, prove que

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Essa expressão é conhecida como Fórmula de De Moivre. *Dica: utilize as seguintes relações trigonométricas acima.*

Exercício 3. Seja $z = cos(\theta) + i\sin(\theta)$ um ponto qualquer na circunferência unitária. Encontre o ângulo entre $\overrightarrow{z}$ e $\overrightarrow{iz}$.

2 Exercícios de Fixação

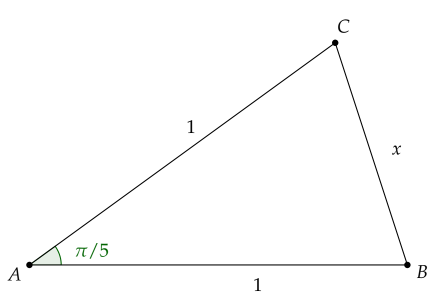
Exercício 4. Seja $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Utilize o exercício 2 para encontrar todos os valores de θ para os quais as equações abaixo são satisfeitas.

(a) $z^5 = 1$.

(b) $z^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$.

(c) $z^4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

Exercício 5. Utilize o triângulo abaixo para encontrar o seno e o cosseno do ângulo de $\pi/10$.



Exercício 6. Encontre as coordenadas do número complexo contido na circunferência unitária cujo argumento (em radianos) é igual a $\pi/5$. *Dica: utilize o exercício anterior.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Mostre que se z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero, então $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$.

Exercício 8. Seja $ABCD$ um quadrado localizado no primeiro quadrante, onde $A = (1, 2)$ e $B = (3, 5)$. Determine as coordenadas dos pontos C e D.

Exercício 9. Dois vértices consecutivos de um octógono regular convexo são $(1, 2)$ e $(3, -2)$. Determine o centro do octógono.

Respostas e Soluções.

1.

(a) O número complexo deve ser dado por

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Observe que $\cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$ e $\sin(2\pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Logo, segue que o número complexo z procurado é igual a

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) O número complexo deve ser dado por

$$z = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Então, vamos calcular o seno e o cosseno do ângulo $5\pi/12$. Pelas fórmulas do cosseno e seno da soma de dois ângulos, temos

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{10\pi}{12}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Como $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1$, podemos resolver o sistema linear formado por essa equação e a equação acima para encontrar os seguintes valores:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

e

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Note que, uma vez que z pertence ao primeiro quadrante do plano, devemos ter $\cos(5\pi/12) > 0$ e $\sin(5\pi/12) > 0$. Logo, segue que o número complexo z procurado é igual a

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(c) Similarmente ao item anterior, o número complexo deve ser dado por

$$z = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Vamos calcular o seno e o cosseno do ângulo $7\pi/12$ utilizando o item (b). Pelas fórmulas do cosseno e seno da soma de dois ângulos, temos

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)$$

e

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right).$$

Lembrando que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$ e, usando o item (b), segue que

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{4} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$$

e

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{4} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4}.$$

Logo, segue que o número complexo z procurado é igual a

$$\frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}} - 2 + \sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6+3\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{4}\right)$$

2. Vamos provar a fórmula de Moivre por indução. Observe que, para $n = 1$ a fórmula é trivialmente verdadeira. Agora, suponha que a igualdade $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ é verdadeira para algum $n \geq 1$. Então, neste caso, vamos provar que a igualdade continua válida para $n+1$.

Se $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$, então temos que

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^{n+1} &= (\cos x + i\sin x)^n \cdot (\cos x + i\sin x)\\ &= (\cos(nx) + i\sin(nx)) \cdot (\cos x + i\sin x)\end{aligned}$$

Expandindo o produto acima, vemos que o lado direito da igualdade é igual a

$$(\cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x) - (\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x)i$$

Pelas fórmulas do cosseno e do seno da soma de dois ângulos, a expressão acima é igual a

$$\cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x).$$

Portanto, concluímos que

$$(\cos x + i\sin x)^{n+1} = \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x)$$

Isso completa o passo de indução e, portanto, finaliza a nossa prova.

3. Seja $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$. Nosso problema se resume a encontrar o ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$iz = \cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta).$$

Como $iz = -\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)$, devemos ter

$$\begin{cases} -\sin(\alpha) = \cos(\alpha+\theta)\\ \cos(\alpha) = \sin(\alpha+\theta)\end{cases}$$

Pelas fórmulas do seno e do cosseno da soma de dois ângulos, veja que $\theta = \pi/2$ é a solução para esse sistema! Portanto, o ângulo entre z e iz é igual a $\pi/2$.

4.

(a) Se $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = 1$, então, pela fórmula de Moivre, temos

$$\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = 1.$$

Assim,

$$\begin{cases} \cos(5\theta) = 1 \\ \sin(5\theta) = 0 \end{cases}$$

Portanto, devemos ter $5\theta = 2\pi n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Concluímos que o conjunto dos valores de θ para os quais $z^5 = 1$ é igual a

$$\left\{\frac{2\pi n}{5} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(b) Se $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \sqrt{3}/2 + i/2$, então, pela fórmula de Moivre, temos

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = \sqrt{3}/2 + i/2.$$

Como $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$, temos

$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos(\pi/6) \\ \sin(3\theta) = \sin(\pi/6) \end{cases}$$

Portanto, as soluções do sistema acima devem ser da forma $3\theta = \pi/6 + 2\pi n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Concluímos que o conjunto dos valores de θ para os quais $z^3 = \sqrt{3}/2 + i/2$ é igual a

$$\left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(c) Se $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, então, pela fórmula de Moivre, temos

$$\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}.$$

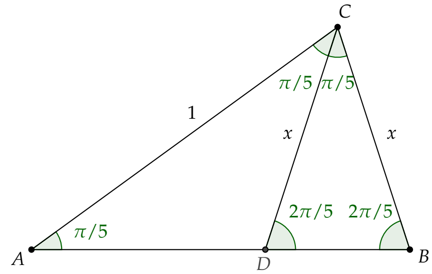
Como $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, temos

$$\begin{cases} \cos(4\theta) = \cos(\pi/4) \\ \sin(4\theta) = \sin(\pi/4) \end{cases}$$

Portanto, as soluções do sistema acima devem ser da forma $4\theta = \pi/4 + 2\pi n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Concluímos que o conjunto dos valores de θ para os quais $z^4 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$ é igual a

$$\left\{\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5. Trace o segmento $\overline{CD}$ como feito no triângulo abaixo.



Note que o triângulo ΔACD é isósceles, pois $\angle DAC = \angle ACD = \pi/5$. Logo, $|\overline{AD}| = x$ e, consequentemente, $|\overline{BD}| = 1 - x$. Agora, observe que os triângulos ΔABC e ΔCBD são semelhantes. Assim, temos a seguinte relação de semelhança.

$$\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|} \iff \frac{1-x}{x} = x.$$

Ou seja, $x^2 + x - 1 = 0$. E então temos $x = (\sqrt{5} - 1)/2$. Agora que temos x, trace a altura $\overline{AH}$ do triângulo ΔABC. Essa altura divide o ângulo $\angle BAC$ e o segmento $\overline{BC}$ em duas partes iguais. Assim, segue que

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{|\overline{BC}|}{2\cdot|\overline{AC}|} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Pela relação $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, segue que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \iff \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

6. Vamos utilizar o mesmo triângulo ΔABC do exercício anterior. Para isso, trace a altura $\overline{CH}$ do triângulo ΔABC. Veja que ela divide o segmento $\overline{BD}$ em duas partes iguais, e assim $\overline{BH} = (1-x)/2$. Agora, vamos encontrar a medida da altura $\overline{CH}$. Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ΔBHC, segue que

$$x^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + |\overline{CH}|^2 \iff |\overline{CH}| = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

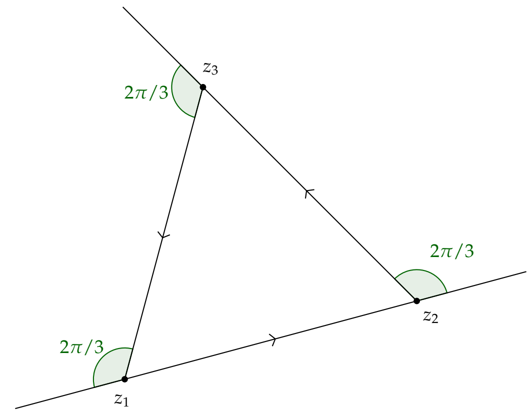
Assim, segue que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{|\overline{CH}|}{|\overline{AC}|} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Pela relação $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, segue que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8} \iff \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

7. Se $\Delta(z_1 z_2 z_3)$ forma um triângulo equilátero, observe que o vetor $z_3 - z_2$ pode ser obtido a partir de $z_2 - z_1$ por uma rotação de $2\pi/3$. Analogamente, $z_1 - z_3$ pode ser obtido a partir de $z_3 - z_2$ por uma rotação de $2\pi/3$. Veja a figura abaixo.



Assim, segue que

$$z_3 - z_2 = (z_2 - z_1) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

e

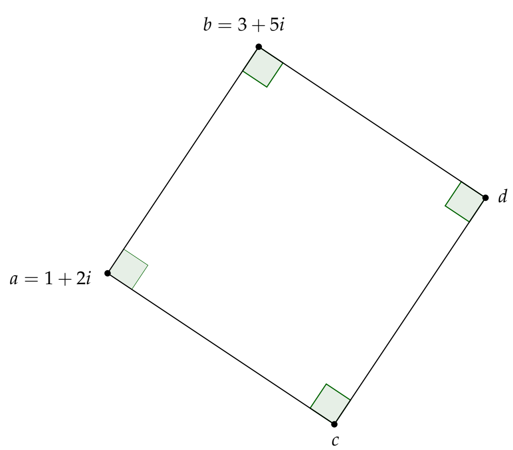
$$z_1 - z_3 = (z_3 - z_2) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \iff \\ &z_3^2 - 2z_2z_3 + z_2^2 = -z_1^2 + z_1z_2 - z_2z_3 + z_1z_3 \iff \\ &z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 \end{aligned}$$

como queríamos.

8. Como $ABCD$ está localizado no primeiro quadrante, devemos ter os pontos C e D abaixo da reta que passa por A e B. Vamos analisar o problema no plano complexo. Então, A é associado ao ponto $1 + 2i$ e B ao ponto $3 + 5i$. Sejam a, b, c e d, respectivamente, os pontos no plano complexo que correspondem a A, B, C e D. Veja a figura abaixo.



Observe que o vetor $c - a$ é obtido rotacionando o vetor $b - a$ por um ângulo de $-\pi/2$. Analogamente, $d - b$ é obtido rotacionando o vetor $a - b$ por um ângulo de $\pi/2$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} c - a &= (b - a) \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ d - b &= (a - b) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Dessas equações, segue que

$$c - a = (a - b)i = d - b$$

Portanto, temos

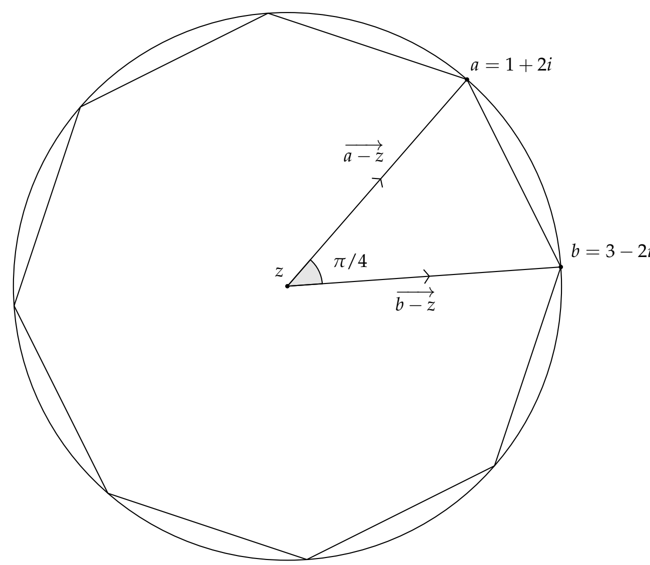
$$\begin{aligned} c = a + (a - b)i &= 1 + 2i - (2 + 3i)i \\ &= 4. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d = b + (a - b)i &= 1 + 2i - (2 + 3i)i \\ &= 3 + 5i - (2 + 3i)i \\ &= 6 + 3i. \end{aligned}$$

Concluímos que as coordenadas dos pontos C e D são, respectivamente, iguais a $(4, 0)$ e $(6, 3)$.

9. Um octógono é composto de 8 triângulos isósceles, lado a lado, com vértices em seu centro. Para encontrar o centro do octógono, vamos estudar um desses triângulos no plano complexo. No plano complexo, (1,2) é associado ao ponto $a = 1 + 2i$ e $(3, -2)$ ao ponto $b = 3 - 2i$. Seja z o ponto que corresponde ao centro do octógono. Agora, nosso objeto de estudo será o triângulo formado pelos pontos z, a e b. Veja a figura abaixo.



Note que o ângulo formado entre os vetores $b - z$ e $a - z$ é igual a $\pi/4$. Ou seja, o vetor $a - z$ é igual ao vetor $b - z$ rotacionado por um ângulo de $\pi/4$. Assim, temos

$$\begin{aligned} a - z &= (b - z) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= (b - z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Substituindo acima os valores de a e b, segue que

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) z = 1 - \frac{5}{\sqrt{2}} + i\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Multiplicando ambos os lados da última equação por $1 - 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, segue que

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{2})z &= 4 - 4\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ z &= \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{i\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do centro desse octógono são

$$\left(\frac{4-4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).$$

Material elaborado por Letícia Mattos.