Derivada como Função

Propriedades

Introdução ao Cálculo

PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP

Derivada como Função
Propriedades

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $f(x) = 2x^3$, determine o valor de $f'(1)$.

Exercício 2. Se $f(x) = 6x^4$, determine o valor de $f'(1)$.

Exercício 3. Se $f(x) = x^5$, determine o valor de $\dfrac{df}{dx}(2)$.

Exercício 4. Se $f(x) = x^3 + 30x^2 + 34$, determine o valor de $f''(1)$.

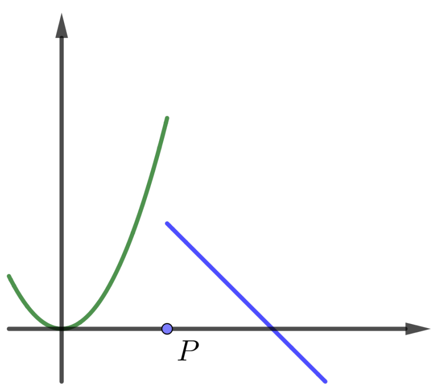
Exercício 5. Se $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11$, determine o valor de $\dfrac{d^2f}{dx^2}(1)$.

Exercício 6. Se $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15$, determine o valor de $f''(1)$.

Exercício 7. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 2 \\ 4 - x \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$$

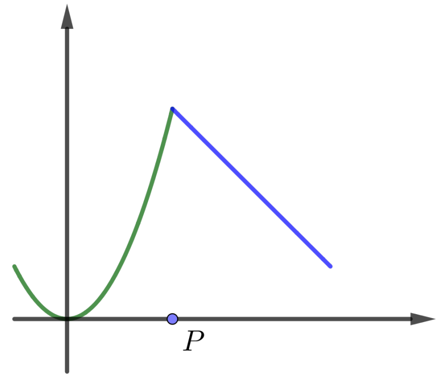
Explique qual a obstrução geométrica no gráfico desta função justifica a não existência da sua derivada no ponto $x = 2$.



Exercício 8. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 2 \\ 6 - x \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$$

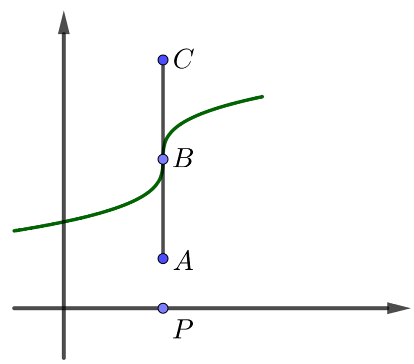
Explique qual a obstrução geométrica no gráfico desta função justifica a não existência da sua derivada no ponto $x = 2$.



Exercício 9. Considere a função

$$f(x) = \sqrt[3]{x - 2} + 3,$$

para $-1 < x < 4$. Explique qual a obstrução geométrica no gráfico desta função justifica a não existência da sua derivada no ponto $x = 2$.



2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. Se $f(x) = 2x^3 + 5$, calcule o valor de $\dfrac{d^3f}{dx^3}(3)$.

Exercício 11. Se $f(x) = 6x^3 + 9$, calcule o valor de $\dfrac{d^4f}{dx^4}(1)$.

Exercício 12. Se $f(x) = x^n$, calcule o valor de $\dfrac{d^nf}{dx^n}(1)$.

Exercício 13. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \leq 1 \\ ax + b \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b para que f seja derivável em $x = 1$.

Exercício 14. Se $\dfrac{dy}{dx} = 4x + 1$ e $y(x) = ax^2 + bx + c$, calcule o valor de a.

Exercício 15. Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as três condições:

(a) $f(1) = 2$

(b)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$$

(c)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. A função $\sin^{-1} : [-1,1] \to [\pi/2, \pi/2]$ é a inversa da função $\sin x$ restrita ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. De modo semelhante, a função $\cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ é a inversa da função $\cos x$ restrita ao intervalo $[0,\pi]$. Seja $f(x) = \sin^{-1}(\operatorname{sen} 6x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Verifique que $f(\pi/6 - x) = f(x)$, $f(\pi/3 - x) = -f(x)$ e $f(\pi/3 + x) = f(x)$.

b) Esboce o gráfico de f.

Exercício 17. Dado um conjunto finito de números reais $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que não é derivável apenas nos pontos do conjunto S.

Respostas e Soluções.

1. Temos $f'(x) = 6x^2$. Portanto, $f'(1) = 6$.

2. Temos $f'(x) = 24x^3$. Portanto, $f'(1) = 24$.

3. Temos $\dfrac{df}{dx}(x) = 5x^4$. Portanto, $\dfrac{df}{dx}(2) = 80$.

4. Temos $f''(x) = 6x + 60$. Portanto, $f''(1) = 66$.

5. Temos $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x) = 6x + 14$. Portanto, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(1) = 20$.

6. Temos $f''(x) = 6x + 18$. Portanto, $f''(1) = 24$.

7. Sabemos que se f é derivável em a, então f é contínua em a. Como a função f não é continua no ponto 2, fenômeno que é indicado geometricamente pela desconexão entre as partes azul e verde do gráfico, então f não é derivável em 2.

8.
Como

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4$$

são diferentes, podemos concluir que não existe

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Geometricamente isso significa que os "limites"das retas secantes ao gráfico à esquerda e à direita do ponto 2 são distintas. A manifestação disso no gráfico é o aparecimento de um "bico"no ponto 2.

9. O segmento vertical AC é a tangente ao gráfico no ponto $B = (2, f(2))$. Como a tangente é vertical, as inclinações das retas secantes ao gráfico pelo ponto B e um ponto genérico $(x, f(x))$ não convergem para um número real quando x tende a 2. Então uma tangente vertical ao gráfico da função também é uma obstrução geométrica para a existência de derivada.

10. Temos $\dfrac{d^3f}{dx^3}(x) = 12$. Portanto, $\dfrac{d^3f}{dx^3}(3) = 12$.

11. Temos $\dfrac{d^4f}{dx^4}(x) = 0$. Portanto, $\dfrac{d^4f}{dx^4}(1) = 0$.

12. Para $i \leq n$, temos

$$\frac{d^if}{dx^i}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)x^{n-i}.$$

Portanto,

$$\frac{d^nf}{dx^n}(1) = n!$$

13. Para que a derivada exista, f deve ser contínua em $x = 1$. Consequentemente $1 = f(1) = a + b$. Assim

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = a$$

Para que esses limites laterais existam, devemos ter $a = 1$. Portanto, $f(x) = x$ para todo x.

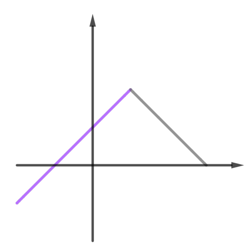
14. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(p) &= \lim_{x\to p} \frac{y(x) - y(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x\to p} \left(\frac{a(x^2 - p^2) + b(x - p)}{x - p} \right) \\
&= \lim_{x\to p} (a(x + p) + b) \\
&= 2ap + b
\end{aligned}$$

Como $2a = 4$, segue que $a = 2$.

15. Uma possibilidade é

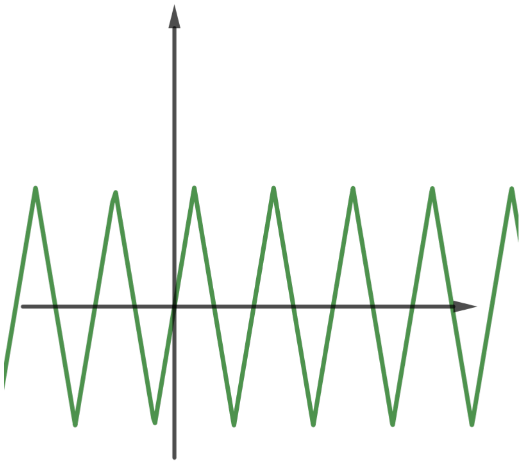
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ 3 - x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$



16.

(a) Como $\operatorname{sen}(6(\pi/6 - x)) = \operatorname{sen}(6x)$, $\operatorname{sen}(6(\pi/3 - x)) = -\operatorname{sen}(6x)$ e $\operatorname{sen}(6(\pi/3 + x)) = \operatorname{sen}(6x)$, segue que $f(\pi/6 - x) = f(x)$, $f(\pi/3 - x) = -f(x)$ e $f(\pi/3 + x) = f(x)$.

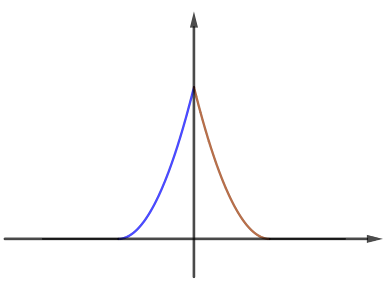
(b) Para $0 \leq x \leq \pi/12$, temos $f(x) = 6x$. Do item anterior, podemos concluir que a função f possui período $\pi/3$ e que o gráfico é simétrico em relação às retas $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k \cdot \dfrac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim o gráfico consiste de triângulos justapostos como indicado na figura abaixo.



17. Dado $d > 0$, a função

$$f(x) = \begin{cases} (x+d)^2 \text{ se } -d < x \leq 0 \\ (-x+d)^2 \text{ se } 0 < x < d. \\ 0 \text{ se } x \notin (-d, d) \end{cases}$$

é contínua e não é derivável apenas no ponto $x = 0$.



Transladando o gráfico de f podemos construir funções contínuas que não são deriváveis em qualquer ponto real. Por exemplo, a função $g_1(x) = f(x-p)$ não é derivável apenas em p. Seja d um número real tal que $2d$ é menor que a menor distância entre dois pontos de S. A função

$$g(x) = f(x-x_1) + f(x-x_2) + \ldots + f(x-x_n)$$

é uma função contínua, pois é a soma de funções contínuas. Além disso, em uma vizinhança de cada x_i a função coincide com $f(x-x_i)$ e assim não é derivável apenas em x_i. Fora de vizinhas apropriadas desses pontos a função é identicamente nula e consequentemente é derivável com derivada nula.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com