Módulo de Geometria Analítica 1

Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano.

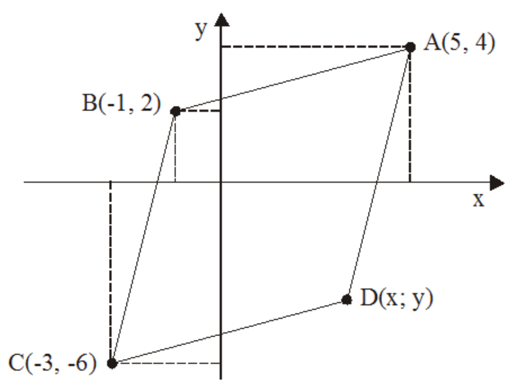
3^a série E.M.

Geometria Analítica 1
Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $a < 0$ e $b > 0$, os pontos $P(a;–b)$ e $Q(b;–a)$ pertencem, respectivamente, a quais quadrantes?

Exercício 2. Quais as coordenadas do ponto D no paralelogramo abaixo?



Exercício 3. Sejam os pontos $A(3, -2)$ e $B(5, 4)$. Qual a medida do segmento de reta $\overline{AB}$?

Exercício 4. Os vértices da base de um triângulo isósceles são os pontos $(1,–1)$ e $(–3, 4)$ de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares. Qual a ordenada do terceiro vértice, se ele pertence ao eixo das ordenadas?

Exercício 5. Os pontos $P(1, 3)$ e $Q(6, 3)$ são vértices do triângulo PQR. Sabe-se que o lado PR mede 3 cm e o lado QR mede 4 cm. Quais as possíveis coordenadas do ponto R ?

Exercício 6. Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

Exercício 7. Uma das diagonais de um quadrado tem extremidades $A(1; 1)$ e $C(3; 3)$. Quais as coordenadas dos outros dois vértices?

Exercício 8. Seja r a reta determinada pelos pontos $(5, 4)$ e $(3, 2)$. Quais os pontos de r que são equidistantes do ponto $(3, 1)$ e do eixo das abscissas?

Exercício 9. Considere o triângulo ABC cujas coordenadas são dadas por: $A(0, 1)$, $B(6,–2)$ e $C(4, 3)$. Determinar as coordenadas do baricentro G.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 10. Os pontos $(0; 0)$, $(1; 3)$ e $(10; 0)$ são vértices de um retângulo. Qual o ponto que representa o quarto vértice do retângulo?

Exercício 11. Calcular a distância da origem ao vértice da parábola: $y = x^2 - 6x + 10$.

Exercício 12. Dois vértices de um triângulo são $A(0, 0)$ e $B(9, 0)$. O centróide é dado pelo ponto $(6, 1)$. Quais as coordenadas do terceiro vértice do triângulo?

Exercício 13. Determinar o ponto P equidistante da origem e dos pontos $A(1, 0)$ e $B(0, 3)$.

Exercício 14. Os pontos X, Y, Z, W, distintos e colineares, são tais que Y é o ponto médio do segmento XW e Z é o ponto médio do segmento YW. Qual a razão entre as medidas dos segmentos XY e XZ?

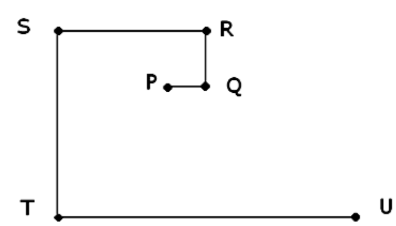
Exercício 15. Sabe-se que $A = (1, 2)$ e $B = (2, 1)$. Qual a distância do centro do quadrado $ABCD$ à origem?

Exercício 16. Num sistema cartesiano ortogonal no plano, as coordenadas de um triângulo isósceles ABC, de base BC, são $A = (0; 8)$, $B = (0; 18)$ e $C = (x; 0)$, sendo $x \neq 0$. Então, qual a área do triângulo ABC?

Exercício 17. Até que ponto o segmento de extremos $A(1;–1)$ e $B(4; 5)$ deve ser prolongado, no sentido AB, para que seu comprimento seja triplicado?

Exercício 18. Os pontos A, B e C são colineares e o ponto $B = (–4; 1)$ está situado a $\dfrac{3}{5}$ da distância que vai de $A = (2;–2)$ a $C = (x; y)$. Determinar o ponto C.

Exercício 19. Na linha poligonal $PQRSTU$, plana e aberta, como mostra a figura, dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares, a medida de PQ é 1 m e, a partir de QR, inclusive, os demais comprimentos dos segmentos são obtidos, dobrando o valor do segmento anterior.



Qual a distância de P até U, em metros?

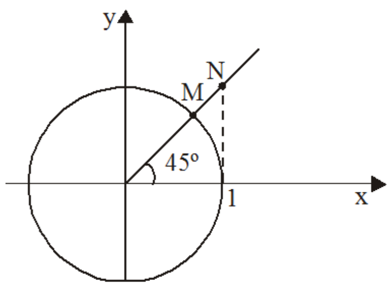
Exercício 20. Considere os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (8, 6)$. Determine as coordenadas do ponto P, pertencente ao eixo x, de modo que os segmentos AP e PB tenham o mesmo comprimento.

Exercício 21. Sejam $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (3, 4)$ e $M_3 = (1, -1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 22. Um programa de rádio é gerado em uma cidade plana, a partir de uma central C localizada 40 km a leste e 20 km a norte da antena de transmissão T. C envia o sinal de rádio para T, que em seguida o transmite em todas as direções, a uma distância máxima de 60 km. Qual o ponto mais a leste de C, que está 20 km a norte de T e poderá receber o sinal da rádio, está a uma distância de C, em km?

Exercício 23. Considere a figura abaixo:



Qual o comprimento do segmento MN?

Exercício 24. Sabe-se que a reta $2x–y+4=0$ passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos $A=(2k,1)$ e $B=(1,k)$. Qual o valor de k?

Exercício 25. Considerando, no plano cartesiano, os pontos $A=(x,0)$, $B=(1,0)$ e $C=(4,0)$, determine todos os valores de x para os quais a soma da distância de A a B e da distância de A a C seja menor ou igual a 7.

Exercício 26. Demonstrar que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer $P(x;y)$ a dois vértices opostos de um retângulo é igual à soma dos quadrados de suas distâncias aos outros dois vértices. Tomar para vértices os pontos $(0;0)$, $(0;b)$, $(a;b)$ e $(a;0)$.

Exercício 27. O triângulo MNP tem vértices nos pontos médios dos lados do triângulo ABC, sendo M o ponto médio de AB, N o ponto médio AC e P o ponto médio de BC. Qual a distância entre os baricentros dos $\triangle MNP$ e $\triangle ABC$?

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado do vestibular da CESCEM)
Sendo $a < 0$, então $-a > 0$ e, sendo $b > 0$, temos $-b < 0$. Portanto, o ponto P tem abscissa e ordenada negativas, logo está no 3° quadrante. Para o ponto Q, temos abscissa e ordenada positivas, então ele está no 1° quadrante.

2. (Adaptado do vestibular da Cescem)
Como os lados opostos possuem comprimentos iguais, temos

$$(x-5) = \Delta x_{AD} = \Delta x_{BC} = (-3-(-1)) = -2,$$

ou seja, $x = 3$. Para a coordenada y, temos

$$(y-4) = \Delta y_{AD} = \Delta y_{BC} = (-6-(2)) = -8,$$

ou seja, $y = -4$.

3. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE))
A medida do segmento $\overline{AB}$ será igual a distância entre os pontos A e B, que pode ser calculada como

$$d_{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (4-(-2))^2} = 2\sqrt{10}\ u.c..$$

4. (Extraído do vestibular da VUNESP (SP))
Todo ponto sobre o eixo das ordenadas tem $x = 0$ como abscissa. Agora, seja $C(0, y)$ o terceiro vértice. Como o triângulo é isósceles, a distância de C aos pontos da base dados são iguais, ou seja,

$$\begin{gathered}\sqrt{(0-1)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (y-4)^2}\\ 1 + y^2 + 2y + 1 = 9 + y^2 - 8y + 16\\ y = \frac{23}{10}.\end{gathered}$$

5. (Adaptado do vestibular da UEL (PR))
Sendo (x, y) as coordenadas do ponto R, podemos construir o sistema: $\begin{cases} d_{PR} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 3 \\ d_{QR} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = 4 \end{cases}$

E resolvendo-o, teremos $R(2,8; 5,4)$ ou $R(2,8; 0,6)$.

Outra solução:
Como $PQ = \sqrt{(1-6)^2 + (3-3)^2} = 5$, $PR = 3$ e $QR = 4$, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, o $\triangle PQR$ é retângulo em R, com hipotenusa PQ, e catetos PR e QR. Dado que PQ é paralelo ao eixo x, se h é a altura do triângulo relativa à hipotenusa, a ordenada de R será igual a $3 + h$ ou, por simetria, $3 - h$. Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos $5h = 3 \cdot 4$, ou seja, $h = 2,4$. Sendo m a projeção de PQ sobre a hipotenusa, a abscissa de R será igual a $1 + m$. Usando que $3^2 = m \cdot 5$ teremos $m = \dfrac{9}{5} = 1,8$ e então as possíveis coordenadas de R são$(2,8; 5,4)$ ou $(2,8; 0,6)$.

6. (Extraído do vestibular da FUVEST (SP))
Seja $d = \overline{AB}$ e $m = \overline{BP}$, então $\overline{BC} = \dfrac{2d}{3}$ e $\overline{PC} = m - 20$. Do enunciado, podemos construir o sistema

$$\begin{cases} 2m - 20 = \dfrac{2d}{3} \Rightarrow 3m - 30 = d \\ d + m = 210 \Rightarrow 3m - 30 + m = 210 \Rightarrow 4m = 240 \end{cases}$$

e teremos assim $m = 60$ km.

7. (Adaptado do vestibular da USP (SP))
Como AC está sobre a primeira bissetriz, podemos completar os próximos pontos observando que $y_A = y_B$, $x_B = x_C$, $y_C = y_D$ e $x_A = x_D$. Assim os outros vértices são os pontos $(3; 1)$ e $(1; 3)$.

8. (Adaptado do vestibular da UFU (MG))
A distância de um ponto H de r ao eixo das abscissa é igual à y_H. E a distância de H até $(3, 1)$ é tal que $d^2 = \sqrt{(3-x_H)^2 + (1-y_H)^2}$. Agora, a reta r tem coeficiente angular $a_r = \dfrac{4-2}{5-3} = 1$. Daí $a_r = \dfrac{4-b_r}{5-0}$, na qual b_r é o coeficiente linear, e assim obtemos $b_r = -1$. A equação da reta (r) será dada por : $y = x - 1$ e, consequentemente, para que H cumpra o desejado, devemos ter

$$\begin{cases} y_H &= \sqrt{(3-x_H)^2 + (1-y_H)^2} \\ y_H &= x_H - 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos como soluções $S = \{(6; 5), (2; 1)\}$.

9. As coordenadas do baricentro, em função das coordenadas dos vértices, são dadas por $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$. Assim, as coordenadas do baricentro do triângulo são:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{0+6+4}{3} = \frac{10}{3} \\ y_G &= \frac{1+(-2)+3}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

10. (Extraído do vestibular da PUC Campinas (SP))
Se $A = (0; 0)$, $B = (1; 3)$ e $C = (10; 0)$, como $ABCD$ é um retângulo, temos $x_A - x_B = x_C - x_D$ e $y_A - y_B = y_C - y_D$. As duas equações anteriores porduzem $x_D = 9$ e $y_D = -3$.

11. (Extraído do vestibular da FEI (SP))
O vértice da parábola é o ponto de coordenadas $x_V = -\dfrac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3$ e $y_V = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1$. A distância de V à origem é

$$d_{VO} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}.$$

12. As coordenadas do Centróide, ou baricentro, são dadas pelas médias aritméticas das coordenadas correspondentes dos vértices. Então

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{0+9+x_C}{3} \text{ resultando em } x_C = 9 \text{ e} \\ 1 &= \frac{0+0+y_C}{3} \text{ resultando em } y_C = 3. \end{aligned}$$

13. Sendo $P(x,y)$ equidistante dos pontos $O(0,0)$ e $B(0,3)$, teremos que

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} &= \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} \\ (x-0)^2+(y-0)^2 &= (x-0)^2+(y-3)^2 \\ x^2+y^2 &= x^2+y^2-6y+9 \\ 6y &= 9 \\ y &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Como $P(x,y)$ também é equidistante dos pontos $O(0,0)$ e $A(1,0)$, ficamos com

$$\begin{aligned} (x-0)^2+(y-0)^2 &= (x-1)^2+(y-0)^2 \\ x^2+y^2 &= x^2-2x+1+y^2 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

E chegamos ao ponto $P(1/2;3/2)$.

14. (Adaptado do vestibular da UECE (CE))
Sendo Z ponto médio de YW, temos que $\overline{YZ} = \overline{ZW} = d$ e $\overline{YW} = 2d$. Agora, como Y é ponto médio de XW, ficamos com $\overline{XY} = \overline{YW} = 2d$. Logo, calculamos $\overline{XY} = 2d$ e $\overline{XZ} = 3d$ e a razão pedida é igual a $\dfrac{2}{3}$.

15. (Adaptado do vestibular da CESCEM)
O centro $Q = (x,y)$ do quadrado é equidistante dos pontos $A = (1,2)$ e $B = (2,1)$, daí teremos que

$$\begin{aligned} (x-1)^2+(y-2)^2 &= (x-2)^2+(y-1)^2 \\ x^2-2x+1+y^2-4y+4 &= x^2-4x+4+y^2-2y+1 \\ x &= y. \end{aligned}$$

Ou seja, Q pertence á primeira bissetriz, além disso, observe que AB é perpendicular à ela e, portanto, $x_A = x_Q$ e $y_B = y_Q$ ou $x_B = x_Q$ e $y_A = y_Q$. Obtemos assim, $Q = (1,1)$ ou $(2,2)$. Agora, calculando as distâncias de $(1,1)$ e $(2,2)$ até a origem, encontramos $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$, respectivamente.

16. (Adaptado do vestibular da OSEC (SP))
Como $\overline{AB} = \overline{AC}$. Daí, teremos

$$\begin{aligned} (0-0)^2+(18-8)^2 &= (x-0)^2+(0-8)^2 \\ 10^2 &= x^2+8^2 \\ x &= \pm 6. \end{aligned}$$

Então, a área será igual a $\dfrac{10\cdot 6}{2} = 30$ u.a..

17. (Extraído do vestibular do MACK (SP))
Como $\Delta x_{AB} = 3$ e $\Delta y_{AB} = 6$, ao triplicar o comprimento chegaremos à $\Delta x' = 9$ e $\Delta y' = 18$, então o novo ponto será $(1+9, -1+18) = (10,17)$.

Outra solução:

Perceba que a reta AB tem coeficiente angular igual a $\dfrac{5-(-1)}{4-1} = 2$. Seu coeficiente linear b pode ser obtido na equação $2 = \dfrac{5-b}{4-0}$, produzindo $b = -3$ e assim a equação da reta suporte de (AB) é : $y = 2x-3$. Queremos um ponto C tal que $d_{AC} = 3d_{AB}$, daí, podemos construir o sistema

$$\begin{cases} y = 2x-3 \\ (x-1)^2+(y-(-1))^2 = 3\cdot\left((4-1)^2+(-1-5)^2\right) \end{cases}$$

A solução pertinente (sentido AB) é o ponto $(10,17)$.

18. (Extraído do vestibular da PUC Campinas)
Como $\Delta x' = -6$ e $\Delta y' = 3$ e essas distâncias são $\dfrac{3}{5}$ do total, então $\Delta x = -10$ e $\Delta y' = 5$. Então novo ponto C é dado por $(2-10, -2+5) = (-8,3)$.

Outra solução:
Suponha que a reta r dá suporte aos três pontos dados, então $a_r = \dfrac{-2-1}{2-(-4)} = -\dfrac{1}{2}$ e $a_r = \dfrac{b_r-(-2)}{0-2}$, produzindo $b_r = -1$. Logo, a equação da reta (r) é dada por : $y = -\dfrac{x}{2}-1$. Analisando os comprimentos dos segmentos $\overline{AC} = \sqrt{(x-2)^2+(y-(-2))^2}$ e $\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2+(1-(-2))^2} = \sqrt{45}$ juntamente com a relação $d_{AB} = \dfrac{3}{5}\cdot d_{AC}$, temos

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2}-1 \\ (x-2)^2+(y+2)^2 = \dfrac{3}{5}\cdot 45 = 27. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, a solução no prolongamento no sentido de AB é $S = \{(-8,3)\}$.

19. (Adaptado do vestibular da UECE (CE))
Sendo $P(0,0)$, podemos fazer a sequência $P(0,0) \xrightarrow{x+1} Q(1,0) \xrightarrow{y+2} R(1,2) \xrightarrow{x-4} S(-3,2) \xrightarrow{y-8} T(-3,-6) \xrightarrow{x+16} U(13,-6)$. Agora, calculamos a distância

pedida como sendo

$$\begin{aligned} d_{PU} &= \sqrt{(13-0)^2+(-6-0)^2} \\ d_{PU} &= \sqrt{169+36} \\ d_{PU} &= \sqrt{205}. \end{aligned}$$

20. (Extraído do vestibular da UFF (RJ))
Sendo $\overline{AP} = \overline{BP}$ e $P = (x, 0)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(0-2)^2 &= (x-8)^2+(0-6)^2 \\ x^2-6x+9+4 &= x^2-16x+64+36 \\ 10x &= 87 \\ x &= \frac{87}{10} \end{aligned}$$

Então, ficamos com $P = (87/10, 0)$.

21. (Extraído do vestibular da UFRJ (RJ))
Sendo A, B e C os vértices do triângulo, podemos construir os sistemas:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2} &= 1 \\ \dfrac{x_A+x_C}{2} &= 3 \\ \dfrac{x_B+x_C}{2} &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y_A+y_B}{2} &= 2 \\ \dfrac{y_A+y_C}{2} &= 4 \\ \dfrac{y_B+y_C}{2} &= -1 \end{cases}$$

Cuja solução será $A = (3, 7)$, $B = (-1, -3)$ e $C = (3, 1)$.

22. (Adaptado do vestibular da UFSCar (SP))
Seja $T(0, 0)$ a origem do sistema de coordenadas e, portanto, $C(40, 20)$. Queremos descobrir o x de um ponto H que possui $y = 20$ e que está a uma distância 60 de T. Sendo assim, teremos que

$$\begin{aligned} d_{TH} &= \sqrt{(x-0)^2+(20-0)^2} \\ 60^2 &= (x)^2+(20)^2 \\ x &= \pm 40\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por fim, observando que foi imposto o ponto mais à leste, a distância de H a C será

$$40\sqrt{2}-40 = 40(\sqrt{2}-1) \text{ km}.$$

23. (Adaptado do vestibular da MACK (SP))
Observe que ON é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 1, logo, ela mede $\sqrt{2}$. Mas $\overline{OM} = 1$, então $\overline{MN} = \sqrt{2}-1$

24. (Adaptado do vestibular da UFOP (MG))
O ponto médio do segmento AB é $\left(\dfrac{2k+1}{2}, \dfrac{1+k}{2}\right)$.
Substituindo-o na reta, teremos

$$\begin{aligned} 2\cdot\left(\frac{2k+1}{2}\right)-\left(\frac{1+k}{2}\right)+4 &= 0 \\ 4k+2-1-k+8 &= 0 \\ 3k &= -9 \\ k &= -3. \end{aligned}$$

25. (Adaptado do vestibular da UFBA (BA))
A questão pede para calcularmos

$$|x+1|+|x-4| \le 7$$

Se $x < 1$, então $-x+1-x+4 \le 7$, ou seja, $x \ge -1$. Assim todo $x \in [-1, 1[$ satisfaz a condição.
Se $1 \le x < 4$, então $x-1-x+4 \le 7$, ou seja, $3 \ge 7$. Assim todo $x \in [1, 4[$ satisfaz a condição.
Se $x \ge 4$, então $x-1+x-4 \le 7$, ou seja, $x \ge 6$,. Assim todo $x \in [4, 6]$ satisfaz a condição.
Por fim, ficamos com $x \in [-1, 1[\cup[1, 4[\cup[4, 6] = [-1, 6]$

26. A distância de P até:

i) o ponto $A = (0, 0)$ é $d^2_{PA} = x^2+y^2$;

ii) $B = (0, b)$ é $d^2_{PB} = x^2+(y-b)^2$;

iii) $C = (a, 0)$ é $d^2_{PC} = (x-a)^2+(y-b)^2$; e

iv) $D = (a, 0)$ é $d^2_{PD} = (x-a)^2+y^2$.

Os pares de vértices opostos são (A, C) e (B, D). Agora, a soma dos quadrados das distâncias de vértices opostos é igual a

$$\begin{aligned} d^2_{PA}+d^2_{PC} &= 2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2 \\ d^2_{PB}+d^2_{PD} &= 2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2. \end{aligned}$$

Portanto,
$$d^2_{PA}+d^2_{PC} = d^2_{PB}+d^2_{PD}.$$

27. Sendo $A = (x_A, x_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. A partir dos dados, temos:

$$\begin{aligned} M(x_M, y_M) &= \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) \\ N(x_N, y_N) &= \left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) \\ P(x_P, y_P) &= \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) \end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{x_M+x_N+x_P}{3} \\ &= \frac{\dfrac{x_A+x_B}{2}+\dfrac{x_A+x_C}{2}+\dfrac{x_B+x_C}{2}}{3} \\ &= \frac{2x_A+2x_B+2x_C}{6} \\ &= \frac{x_A+x_B+x_C}{3}. \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
y_G &= \frac{y_M + y_N + y_P}{3} \\
&= \frac{\dfrac{y_A + y_B}{2} + \dfrac{y_A + y_C}{2} + \dfrac{y_B + y_C}{2}}{3} \\
&= \frac{2y_A + 2y_B + 2y_C}{6} \\
&= \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.
\end{aligned}
$$

Devemos observar que os triângulos ABC e MNP possuem o mesmo baricentro, logo a distância é igual a zero.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com