

Módulo de Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas

Redução ao Primeiro Quadrante

1º ano E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis



Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonômétricas
Redução ao Primeiro Quadrante

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 2° quadrante para o 1° quadrante.

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| a) $\sin 120^\circ$ | f) $\cos 150^\circ$ |
| b) $\sin 135^\circ$ | g) $\operatorname{tg} 120^\circ$ |
| c) $\sin 150^\circ$ | h) $\operatorname{tg} 135^\circ$ |
| d) $\cos 120^\circ$ | i) $\operatorname{tg} 150^\circ$ |
| e) $\cos 135^\circ$ | |

Exercício 2. Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 3° quadrante para o 1° quadrante.

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| a) $\sin 210^\circ$ | f) $\cos 240^\circ$ |
| b) $\sin 225^\circ$ | g) $\operatorname{tg} 210^\circ$ |
| c) $\sin 240^\circ$ | h) $\operatorname{tg} 225^\circ$ |
| d) $\cos 210^\circ$ | i) $\operatorname{tg} 240^\circ$ |
| e) $\cos 225^\circ$ | |

Exercício 3. Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 4° quadrante para o 1° quadrante.

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| a) $\sin 330^\circ$ | f) $\cos 300^\circ$ |
| b) $\sin 315^\circ$ | g) $\operatorname{tg} 330^\circ$ |
| c) $\sin 300^\circ$ | h) $\operatorname{tg} 315^\circ$ |
| d) $\cos 330^\circ$ | i) $\operatorname{tg} 300^\circ$ |
| e) $\cos 315^\circ$ | |

Exercício 4. Calcule os valores das funções trigonométricas abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos adequadamente a cada caso.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\sec 120^\circ$ | d) $\sin 765^\circ$ |
| b) $\operatorname{cosec} 315^\circ$ | e) $\cos 1200^\circ$ |
| c) $\operatorname{cotg} 300^\circ$ | f) $\operatorname{tg} 2370^\circ$ |

Exercício 5. Qual o valor de

$$A = \frac{\operatorname{cosec} 2460^\circ \cdot \sec 1110^\circ}{\operatorname{cotg} 2205^\circ} ?$$

Exercício 6. Dois ângulos distintos, menores que 360° , têm, para seno, o mesmo valor positivo. Qual a soma desses ângulos?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Sejam os arcos trigonométricos α , β e γ , tais que:

- α e β pertencem ao 1° quadrante e γ pertence ao 2° quadrante;
- α e β são complementares;
- α e γ são suplementares.

Nessas condições, qual a razão entre o $\sin \beta$ e o $\cos \gamma$?

Exercício 8. Se $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$, qual o valor de $\sin(\alpha + \pi)$?

Exercício 9. Calcule o valor de cada expressão abaixo:

- a) $\frac{2}{3} \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \cos 315^\circ - 2 \cdot \cos 120^\circ$.
- b) $\cos 1200^\circ - 2 \cdot \sin 1500^\circ$.
- c) $5 \cdot \cos 150^\circ - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \frac{3}{4} \cdot \sin 330^\circ$.

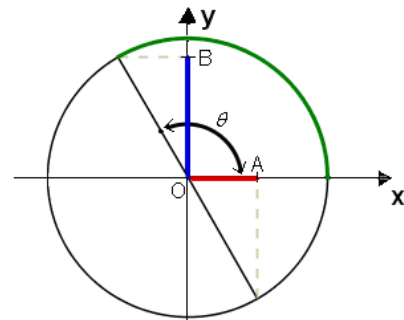
Exercício 10. Em qual quadrante se tem simultaneamente

- a) $\sin \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$
- b) $\sin \alpha > 0$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$
- c) $\cos \alpha > 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$

Exercício 11. Um ângulo tem sua extremidade no 2° quadrante e seu seno vale $\frac{3}{5}$. Qual o valor da tangente desse ângulo?

Exercício 12. Seja $x \in \mathbb{R}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\sec x = -\sqrt{5}$, qual o valor da $\operatorname{cotg} x$?

Exercício 13. No círculo trigonométrico da figura abaixo, tem-se $\theta = 120^\circ$.



Qual o valor numérico do produto

$$\sqrt{3} \cdot OA \cdot OB?$$

Exercício 14. Qual o valor de $\cos 1200^\circ$?

Exercício 15. Sendo $x = -\frac{105\pi}{4}$, quando o valor de $\sin x + \operatorname{tg} x$?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Considere as afirmações a seguir:

I) $\operatorname{tg} 92^\circ = -\operatorname{tg} 88^\circ$

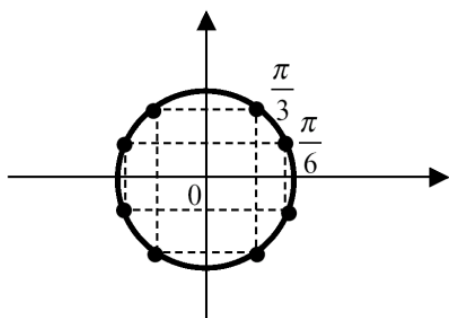
II) $\operatorname{tg} 178^\circ = \operatorname{tg} 88^\circ$

III) $\operatorname{tg} 268^\circ = \operatorname{tg} 88^\circ$

IV) $\operatorname{tg} 272^\circ = -\operatorname{tg} 88^\circ$

Quais estão corretas?

Exercício 17. Observe atentamente a simetria da figura abaixo.



Sabendo-se que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, então quais os valores de $\operatorname{sen} \left(\frac{19}{6} \pi \right)$ e $\operatorname{sen} \left(-\frac{11}{6} \pi \right)$?

Exercício 18. Um arco x é tal que $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$. Sendo assim, qual o valor de $\operatorname{sen}(x + \pi)$?

Respostas e Soluções.

1. Para facilitar, lembre que o seno no 2° quadrante tem sinal positivo, o cosseno tem sinal negativo e a tangente é então negativa. Reduzindo para o primeiro quadrante, temos

$$a) \operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$b) \operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) \operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$d) \operatorname{cos} 120^\circ = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$e) \operatorname{cos} 135^\circ = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f) \operatorname{cos} 150^\circ = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$g) \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

$$h) \operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.$$

$$i) \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Observe que o seno no 3° tem sinal negativo, o cosseno tem sinal negativo e a tangente é então positiva. Sendo assim, teremos que

$$a) \operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \operatorname{sen} 225^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) \operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$d) \operatorname{cos} 210^\circ = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$e) \operatorname{cos} 225^\circ = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f) \operatorname{cos} 240^\circ = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$g) \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$h) \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

$$i) \operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

3. Para facilitar, lembre que o seno no 4° quadrante tem sinal negativo, o cosseno tem sinal positivo e a tangente é negativa. Fazendo a redução para o primeiro quadrante, temos

$$a) \operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$b) \operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) \operatorname{sen} 300^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$d) \operatorname{cos} 330^\circ = \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$e) \operatorname{cos} 315^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f) \operatorname{cos} 300^\circ = \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$g) \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$h) \operatorname{tg} 315^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.$$

$$i) \operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

4.

$$a) \operatorname{sec} 120^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 120^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{cos} 60^\circ} = -2.$$

$$b) \operatorname{cosec} 315^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 315^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{sen} 45^\circ} = -\sqrt{2}.$$

$$c) \operatorname{cotg} 300^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 300^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$d) \operatorname{sen} 765^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$e) \operatorname{cos} 1200^\circ = \operatorname{cos} 120^\circ = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$f) \operatorname{tg} 2370^\circ = \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. (Adaptado do vestibular da UEPB)

Temos que

$$\operatorname{cosec} 2460^\circ = \operatorname{cosec} 300^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 300^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{sec} 1110^\circ = \operatorname{sec} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{1}{\operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ e}$$

$$\operatorname{cotg} 2205^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

Daí, escrevemos

$$A = \frac{\operatorname{cosec} 2460^\circ \cdot \operatorname{sec} 1110^\circ}{\operatorname{cotg} 2205^\circ} \\ = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{1} = -\frac{4}{3}.$$

6. (Adaptado do vestibular da UFJF(MG))

Ângulos com mesmo seno positivo estão no primeiro e segundo quadrantes e podem ser escritos como α e $180^\circ - \alpha$. Portanto, a soma deles é

$$\alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

7. (Adaptado do vestibular da UNIFOR(CE))

Como α e β são complementares, então $\sin \alpha = \cos \beta$ e $\cos \alpha = \sin \beta$. Agora, para α e γ suplementares temos $\sin \alpha = \sin \gamma$ e $\cos \alpha = -\cos \gamma$. Por fim, a razão pedida fica

$$\frac{\sin \beta}{\cos \gamma} = \frac{\cos \alpha}{-\cos \alpha} = -1.$$

8. Perceba que $(\alpha + \pi)$ é o simétrico de α em relação à origem. Assim, o seno mudará de sinal mas terá o mesmo valor absoluto, ou seja,

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha.$$

9.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{3} \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \cos 315^\circ - 2 \cdot \cos 120^\circ &= \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot (-\cos 60^\circ) &= \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= \\ = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 120^\circ - 2 \cdot \sin 150^\circ &= \\ \cos 120^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ &= \\ -\cos 60^\circ - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5 \cdot \cos 150^\circ - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \frac{3}{4} \cdot \sin 330^\circ &= \\ 5 \cdot (-\cos 30^\circ) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4} \cdot (-\sin 30^\circ) &= \\ -5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= \\ = -\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

10. Analisando o ciclo trigonométrico, temos:

a) 3°

b) 2°

c) 1°

11. Seja α o ângulo em questão. Como ele pertence ao 2º quadrante, tem cosseno negativo e tangente negativa. Dado que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, podemos aplicar a fórmula fundamental chegando a

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{9}{25} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{16}{25} \\ \cos \alpha &= \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \\ \cos \alpha &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

12. Perceba que x pertence ao 3º quadrante, logo tem cosseno negativo e cotangente positiva. Com o $\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\sqrt{5}$, temos $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e, ao aplicar a fórmula fundamental, teremos

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin^2 x + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2 x + \frac{1}{5} &= 1 \\ \sin^2 x &= 1 - \frac{1}{5} \\ \sin^2 x &= \frac{4}{5} \\ \sin x &= \pm \sqrt{\frac{4}{5}} \\ \sin x &= -\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{2}$.

13. Perceba que $OA = -\cos 120^\circ = -(-\cos 60^\circ) = \frac{1}{2}$ e $OB = \cos 120^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, a expressão pedida equivale a

$$\sqrt{3} \cdot OA \cdot OB = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

14. Temos que $1200^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 120^\circ$. Então

$$\cos 1200^\circ = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ.$$

15. Perceba que $x = -\frac{105\pi}{4} = -\frac{104\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -26\pi - \frac{\pi}{4}$,
ou seja, $x = -\frac{105\pi}{4}$ é cômruo a $-\frac{\pi}{4}$. Agora, podemos
escrever que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x &= \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2} + 2}{2}.\end{aligned}$$

16. (Adaptado do vestibular da UFRGS)

- I) $\operatorname{tg} 92^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 92^\circ) = -\operatorname{tg} 88^\circ$
 II) $\operatorname{tg} 178^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 178^\circ) = -\operatorname{tg} 2^\circ \neq \operatorname{tg} 88^\circ$
 III) $\operatorname{tg} 268^\circ = \operatorname{tg}(268^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg} 88^\circ$
 IV) $\operatorname{tg} 272^\circ = -\operatorname{tg}(360 - 272) = -\operatorname{tg} 88^\circ$

Ficamos com *I*, *III* e *IV* sendo verdadeiras.

17. (Adaptado do vestibular da UNIMONTES - MG)

Observe que

$$\frac{19\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

Assim, concluimos que $\frac{19\pi}{6}$ é cômruo a $\frac{7\pi}{6}$. Sendo assim,
podemos fazer

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{19\pi}{6} &= \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) \\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Analogamente, ficamos com

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen}\left(-\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

18. (Adaptado do vestibular da UFAM)

Como $\operatorname{sen} x < 0$ temos x ou no *III* ou no *IV* quadrante. Ao
considerarmos $x + \pi$, ficaremos com o novo arco no *I* ou no
II quadrante. Qualquer um deles tem seno positivo e mesmo
valor em módulo. Sendo assim, $\operatorname{sen}(x + \pi) = \frac{3}{5}$.

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
 PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
 CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM