

Módulo Elementos Básicos de Geometria - Parte 3

Circunferência.

8º ano/E.F.

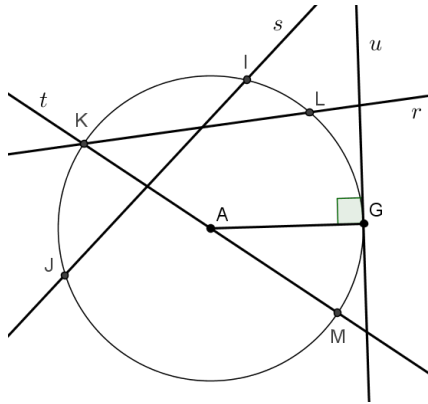
Professores: Cleber Assis e Tiago Miranda



Elementos Básicos de Geometria - Parte 3.
Circunferência.

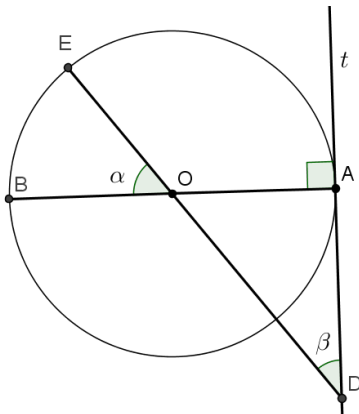
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Observe a figura abaixo e responda:



- Quais retas são secantes à circunferência?
- Quais são as cordas na circunferência?
- Qual corda representa o diâmetro da circunferência?
- Qual a reta tangente à circunferência?

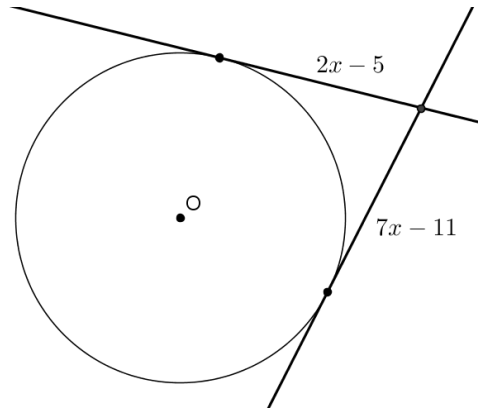
Exercício 2. Na figura, a reta t é tangente à circunferência e O é seu centro. Determine $\alpha + \beta$.



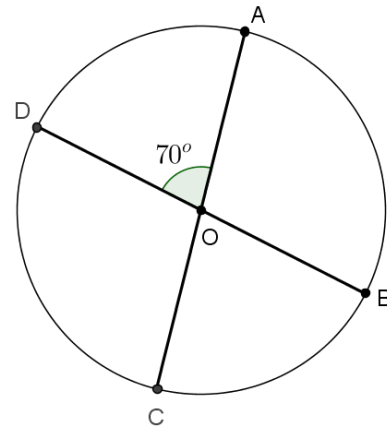
Exercício 3. São dadas duas circunferências de raios $r_1 = 10\text{cm}$ e $r_2 = 22\text{cm}$. Determine a distância d entre seus centros para que as circunferências sejam:

- tangentes externamente.
- tangentes internamente.
- secantes.

Exercício 4. Na figura abaixo, as duas retas são tangentes à circunferência. Determine o valor de x .



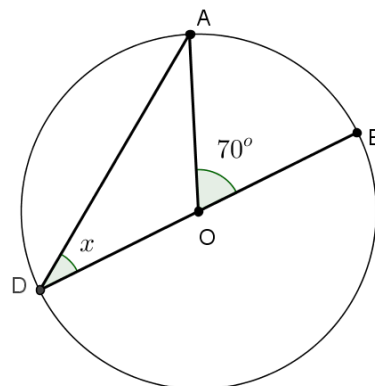
Exercício 5. Na figura, O é o centro da circunferência. Determine:



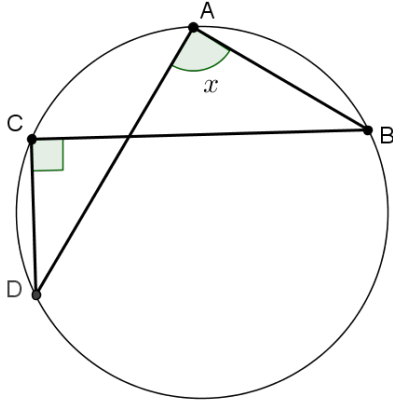
- a medida do menor arco \widehat{AB} .
- a medida de $\angle DOC$.
- a medida do arco \widehat{ABD} .

2 Exercícios de Fixação

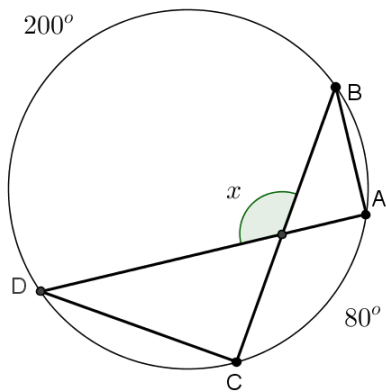
Exercício 6. Determine o valor de x nas figuras abaixo.



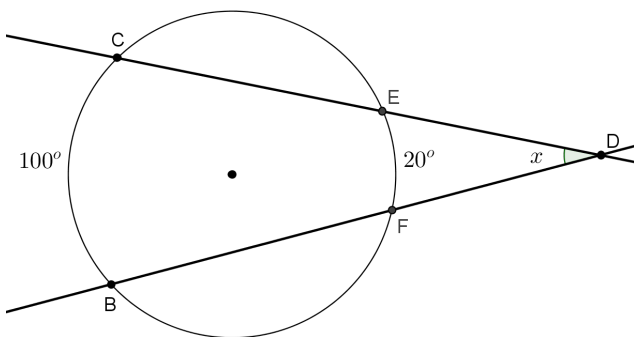
a)



b)

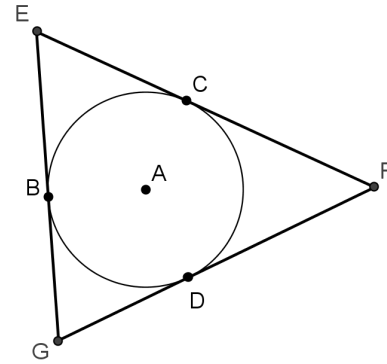


c)

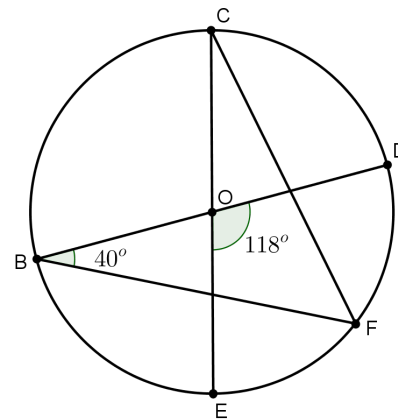


d)

Exercício 7. Na figura abaixo, temos uma circunferência inscrita ao triângulo EFG . Determine a medida do lado EF , sabendo que $BE = 8\text{cm}$ e $DF = 9\text{cm}$.

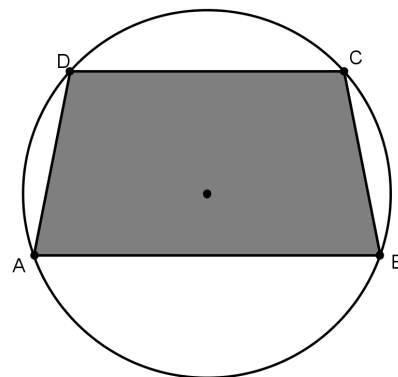


Exercício 8. Determine $\angle ECF$, na figura abaixo, sendo O o centro da circunferência.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

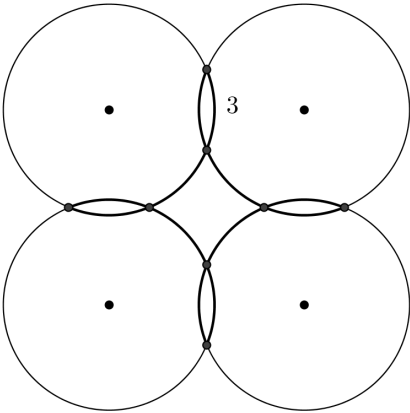
Exercício 9. Na figura, $ABCD$ é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16cm , a base menor 10cm e a altura 9cm . Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?



- a) $\frac{7}{3}$.
- b) $\frac{25}{3}$.

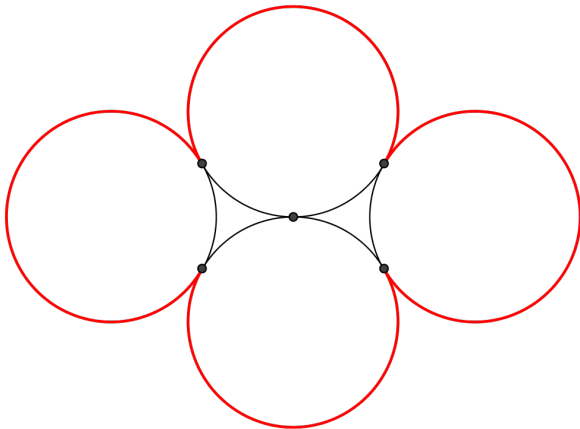
- c) $\frac{35}{3}$.
- d) $\frac{40}{3}$.
- e) $\frac{50}{3}$.

Exercício 10. Quatro circunferências de mesmo raio estão dispostas como na figura, determinando doze pequenos arcos, todos de comprimento 3. Qual é o comprimento de cada uma dessas circunferências?



- a) 18.
- b) 20.
- c) 21.
- d) 22.
- e) 24.

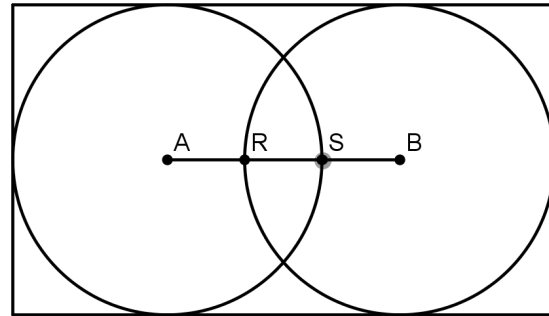
Exercício 11. A figura mostra quatro circunferências, todas de comprimento 1 e tangentes nos pontos indicados. Qual é a soma dos comprimentos dos arcos destacados em vermelho?



- a) $\frac{3}{2}$.

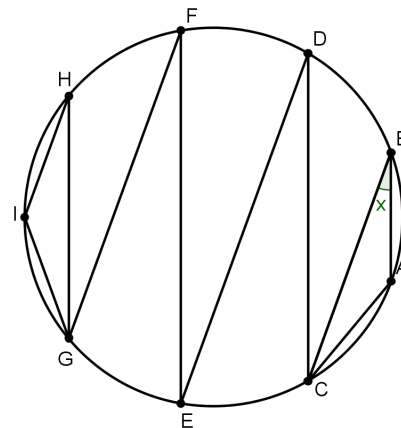
- b) 2.
- c) $\frac{9}{4}$.
- d) $\frac{8}{3}$.
- e) 3.

Exercício 12. Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4cm . A distância entre os pontos R e S é 1cm . Qual é o perímetro do retângulo?



- a) 16cm .
- b) 18cm .
- c) 20cm .
- d) 22cm .
- e) 24cm .

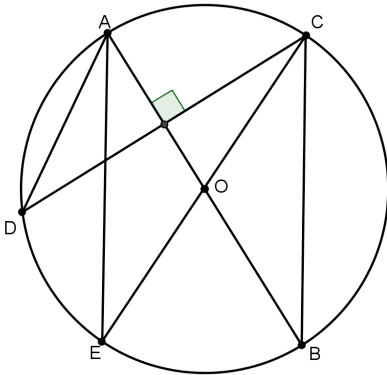
Exercício 13. Considere a figura, onde os pontos de A até I estão sobre uma circunferência. Sabe-se que $\triangle ABC$ e $\triangle GHI$ são isósceles, que AB, CD, EF e GH são segmentos paralelos e que BC, DE, FG e HI são segmentos paralelos. Qual a medida do ângulo x em graus?



- a) 15° .
- b) 20° .

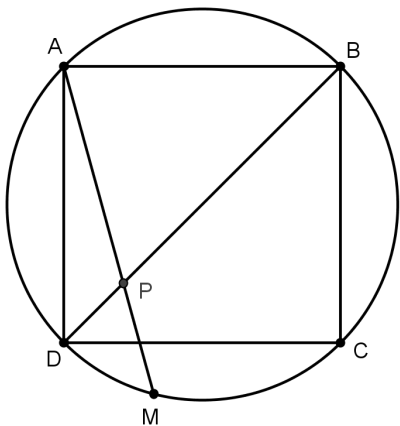
- c) 30° .
- d) 40° .
- e) 45° .

Exercício 14. Na figura o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E . Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35^\circ$ o valor em graus do ângulo $\angle DAE$ é:



- a) 35° .
- b) 10° .
- c) 20° .
- d) 30° .
- e) 55° .

Exercício 15. O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda AM intercepta a diagonal BD no ponto P . Se o segmento AM mede 50, determine a medida do segmento AP .



Respostas e Soluções.

1.

- a) r, s, t .
 b) os segmentos KL, KM e JI .
 c) o segmento KM .
 d) u .

2. $\angle AOD = \angle EOB = \alpha$, pois são opostos pelo vértice. Somando os ângulos internos do triângulo $\triangle AOD$, temos que $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, segue que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

3.

- a) $d = r_1 + r_2$, segue que $d = 32\text{cm}$.
 b) $d = |r_1 - r_2|$, segue que $d = 12\text{cm}$.
 c) $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, segue que $12\text{cm} < d < 32\text{cm}$.

4.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 7x - 11 \\ 2x - 7x &= -11 + 5 \\ -5x &= -6 \\ x &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

5.

- a) a medida de \widehat{AB} é igual à medida do ângulo central $\angle AOB$, que mede $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
 b) $\angle DOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
 c) $\widehat{ABD} = 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.

6.

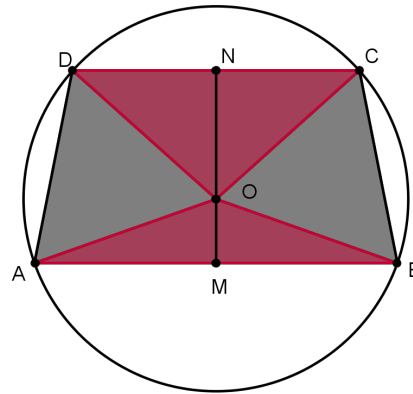
- a) Como $\angle ADB$ é ângulo inscrito e $\angle AOB$ é ângulo central ambos "olhando" para o mesmo arco, temos $\angle ADB = \frac{\angle AOB}{2}$, segue que $x = 35^\circ$.
 b) Como $\angle DCB$ e $\angle DAB$ são ângulos inscritos "olhando" para o mesmo arco, então eles são congruentes, ou seja, $x = 90^\circ$.
 c) $x = \frac{200^\circ + 80^\circ}{2} = 140^\circ$, já que se trata de um ângulo excêntrico interno.
 d) $x = \frac{100^\circ - 20^\circ}{2} = 40^\circ$, já que se trata de um ângulo excêntrico externo.

7. Como BE e EC são segmentos tangentes à circunferência, com uma extremidade comum, então são congruentes, ou seja, $EC = BE = 8\text{cm}$. De forma análoga, $CF = DF = 9\text{cm}$. Temos então que $EF = 8 + 9 = 17\text{cm}$.

$$8. \angle ECF = \frac{\angle EOD}{2} - \angle FBD = 59^\circ - 40^\circ = 19^\circ.$$

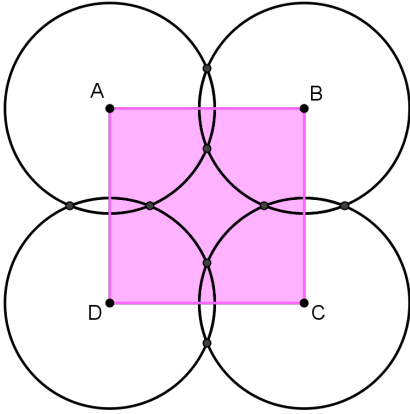
9. (Extraído da OBMEP - 2015)

Seja O o centro da circunferência, OM a altura do triângulo OAB relativa à base AB e ON a altura do triângulo OCD relativa à base CD . Como AB paralelo à CD , segue que os pontos M, O e N estão alinhados e que MN é a altura do trapézio. Vamos denotar $OA = OB = OC = OD = r$, $OM = x$ e $ON = y$. A altura do trapézio é, assim, igual a $x + y = 9\text{cm}$. Como o triângulo OAB é isósceles com base $AB = 16\text{cm}$, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que $r^2 = 8^2 + x^2$. De forma análoga, $r^2 = 5^2 + y^2$. Subtraindo as equações, obtemos $(y + x)(y - x) = 39$.



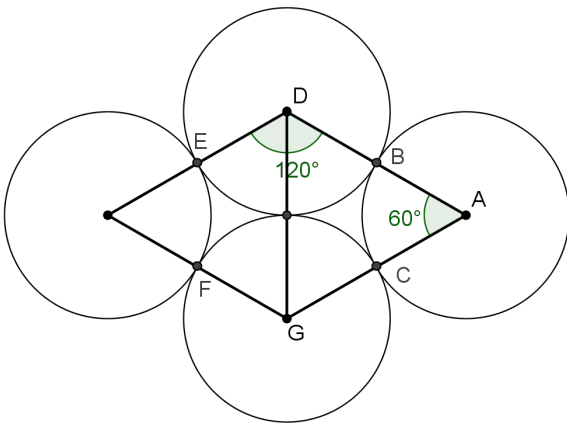
Usando a única possibilidade que resulta em valores positivos, temos $x + y = 9$ e $y - x = \frac{13}{3}$, segue que $x = \frac{7}{3}$ e $y = \frac{20}{3}$. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, chegamos a $r = \frac{25}{3}$. Resposta B.

10. (Extraído da OBMEP - 2014) Devido às simetrias presentes na figura, podemos construir o quadrado $ABCD$, com vértices situados nos centros de cada uma das circunferências, conforme a figura. Observamos que em cada circunferência, os dois lados do quadrado que saem do centro dela determinam um arco cujo comprimento é $\frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{2} = 6$, sendo essa medida a quarta parte do comprimento de cada circunferência. Logo, o comprimento de cada circunferência é 24.



11. (Extraído da OBMEP - 2013)

Seja r o raio comum das circunferências. Unindo os centros A , D e G de três das circunferências, como na figura, e lembrando que a reta que passa pelos centros de duas circunferências tangentes passa também pelo ponto de tangência, vemos que $\triangle ADG$ é equilátero, pois todos seus lados medem $2r$. Logo todos seus ângulos medem 60° ; em particular, o ângulo central \widehat{BAC} mede 60° . Segue que o arco \widehat{BC} corresponde ao ângulo central de $60^\circ = \frac{1}{6}360^\circ$, ou seja, esse arco mede $\frac{1}{6}$ do comprimento da circunferência, que é $\frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$; esse também é o comprimento do arco \widehat{EF} . Já o arco \widehat{BE} corresponde a um ângulo central de 120° ; seu comprimento é então duas vezes o de um arco correspondente a 60° , ou seja, é $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, que é também o comprimento do arco \widehat{CF} . Desse modo, o comprimento total dos arcos pretos é $2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$; como a soma dos comprimentos das circunferências é 4, o comprimento dos arcos vermelhos é $4 - 1 = 3$. Resposta E.



12. (Extraído da OBMEP) O comprimento do retângulo mede $2 \cdot 4 - 1 = 7\text{cm}$, já que o segmento RS é contado

duas vezes quando somamos os dois diâmetros. E como a altura do retângulo tem a mesma medida do diâmetro de uma das circunferências, seu perímetro é $2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 22\text{cm}$. Resposta D.

13. (Extraído da OBM - 2014) Como todo o trapézio inscritível é isósceles e os triângulos mencionados também o são, temos as igualdades entre os arcos determinados pelas seguintes cordas:

$$AB = AC = BD = CE = DF = EG = FH = IG = IH.$$

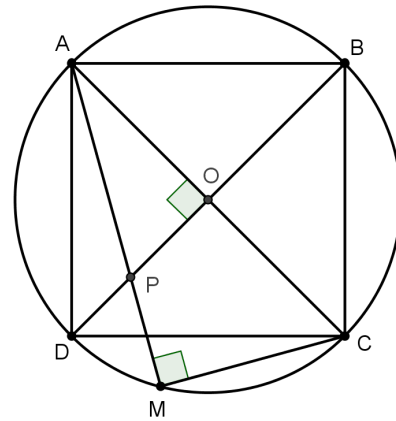
Esses 9 arcos iguais determinam a medida de $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$.

Portanto, o ângulo x mede $\frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$. Resposta B.

14. (Extraído da OBM - 2013) Como O é o centro do círculo, temos $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^\circ$. Como $AO = OE$, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo $\angle EOB$, temos $\angle EAO = \angle OEA = 35^\circ$. Daí, $\angle ADC = \angle AEC = 35^\circ$. Como $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$, podemos concluir que $\angle DAE = 90^\circ - \angle ADC - \angle EAB = 20^\circ$. Resposta C.

15. (Extraído da OBM - 2013) Trace a diagonal AC que intersecta DB no ponto O . Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência. Observe que $\angle CMA = 90^\circ$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^\circ$. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e ACM são semelhantes e, portanto:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{AP}{60} = \frac{30}{50} \Leftrightarrow AP = 36.$$



PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM