Números Complexos – Forma Geométrica

Potenciação de números complexos no plano de Argand–Gauss

Material elaborado por Letícia Mattos.

Números Complexos – Forma Geométrica
Potenciação de números complexos no plano de Argand–Gauss

1 Exercícios Introdutórios

Antes de tudo, vamos relembrar a *Fórmula de De Moivre*:

$$(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)^n = \cos(nx) + i\,\mathrm{sen}(nx),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.
Ao longo dessa lista, também admitir a fórmula de Euler

$$e^{xi} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x.$$

Exercício 1. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$. Assumindo que $z^n = 1$, calcule

$$1 + z + \cdots + z^{n-1}.$$

Exercício 2. Seja $\theta \in (0, \pi)$. Escreva na fórmula trigonométrica o complexo

$$\frac{1 + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$

Exercício 3. Utilizando a expansão do binômio de Newton em $(1+i)^n$, calcule o valor da soma

$$S = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Encontre todos os valores $x \in \mathbb{R}$ para os quais

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Dica: $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

Exercício 5. Se $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$, prove que

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\alpha),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 6. Sejam n, m naturais quaisquer e defina

$$M = \{z \in \mathbb{C} | z^m = 1\} \qquad \text{e} \qquad N = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}.$$

Prove que

$$A \cap B = \{z \in \mathbb{C} | z^d = 1\},$$

onde $d = MDC(m, n)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Mostre que $72°$ é o menor ângulo positivo que satisfaz simultaneamente as equações

$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \\ \mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}\,3x + \mathrm{sen}\,4x = 0. \end{cases}$$

Exercício 8. Determine o valor da soma

$$S = \mathrm{sen}\,a + \mathrm{sen}(a+r) + \mathrm{sen}(a+2r) + \cdots + \mathrm{sen}(a+nr).$$

Exercício 9. Utilizando a fórmula de Euler, prove que

$$i^i = e^{-\pi/2}.$$

Respostas e Soluções.

1. Observe que

$$z^n - 1 = (z-1)\cdot(1+z+\cdots+z^{n-1})$$

Como $z^n - 1 = 0$, devemos ter ou $z = 1$, ou $1+z+\cdots+z^{n-1} = 0$.
Se $z = 1$, então temos

$$1+z+\cdots+z^{n-1} = n.$$

Caso contrário, se $z \neq 1$, temos

$$1+z+\cdots+z^{n-1} = 0.$$

2. Seja $z_1 = 1+\cos\theta + i\,sen\,\theta$ e $z_2 = 1+\cos\theta - i\,sen\,\theta$. Observe que $\overline{z_1} = z_2$, e vice-versa. Então,

$$\begin{aligned}|z_1| &= \sqrt{z_1\cdot\overline{z_1}}\\ &= \sqrt{z_1\cdot z_2}\\ &= \sqrt{\overline{z_2}\cdot z_2}\\ &= |z_2|.\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular os argumentos de z_1 e z_2. Geometricamente, através do desenho de um paralelogramo com os vetores $\overrightarrow{1}$ e $\overrightarrow{z_1-1}$, concluímos que $\arg z_1 = \theta/2$. Analogamente, $\arg z_2 = -\theta/2$. Agora, observe que

$$z_1 = |z_1|e^{i\arg z_1} \qquad \text{e} \qquad z_2 = |z_2|e^{i\arg z_2}.$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\arg z_1}}{|z_2|e^{i\arg z_2}} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = e^{i\theta}.$$

Assim, concluímos que $z_1/z_2 = \cos\theta + i\,sen\,\theta$.

3. Pelo teorema de expansão binomial, temos

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k.$$

Agora, observe que

$$\mathrm{Re}((1+i)^n) = \sum_{k\le n/2}\binom{n}{2k}.$$

Assim, é suficiente encontramos o valor $\mathrm{Re}((1+i)^n)$. Observe que $i+1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$ (isso pode ser visto algebricamente e geometricamente, considerando a soma dos vetores $\overrightarrow{1}$ e $\overrightarrow{i}$). Logo,

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= 2^{n/2}\cdot e^{i\pi n/4}\\ &= 2^{n/2}\cdot(\cos(\pi n/4) + i\,sen(\pi n/4)).\end{aligned}$$

Segue que $\mathrm{Re}((1+i)^n) = 2^{n/2}\cos(\pi n/4)$ e, portanto,

$$\sum_{k\le n/2}\binom{n}{2k} = 2^{n/2}\cos(\pi n/4).$$

4. Utilizando a expressão $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$, temos

$$1 + \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} + \frac{e^{2xi}+e^{-2xi}}{2} + \frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2} = 0.$$

A equação acima é equivalente a

$$e^{-3xi}+e^{-2xi}+e^{-xi}+1+e^{xi}+e^{2xi}+e^{3xi} = -1.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por e^{3xi}, temos

$$1+e^{xi}+e^{2xi}+e^{3xi}+e^{4xi}+e^{5xi}+e^{6xi} = -e^{3xi}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $1-e^{xi}$, segue que

$$1-e^{7xi} = -(1-e^{xi})e^{3xi},$$

o que é equivalente a

$$(1+e^{3xi})(1-e^{4xi}) = 0.$$

A última equação é satisfeita se, e somente se,

$$4x = 2\pi k \qquad \text{ou} \qquad 3x = (2k+1)\pi$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como os ângulos da forma $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) não podem ser solução da equação (caso que corresponde a $1-e^{xi} = 0$), temos que as soluções geram o conjunto

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(\frac{2k+1}{3}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5. Seja $r = |x|$ e $\theta = \arg x$. Então, podemos escrever $x = re^{\theta i}$. Se $x + 1/x = 2\cos\alpha$, então temos que $x+1/x$ é real. Portanto, devemos ter

$$r\,sen\,\theta + \frac{1}{r}\cdot sen(-\theta) = 0.$$

Logo, ou $sen\,\theta = 0$, ou $r = 1/r$, o que nos dá $r = 1$. No caso em que $sen\,\theta = 0$, temos que $x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, assuma que $x > 0$ (caso contrário, multiplique ambos os lados da eq. $x + 1/x = 2\cos\alpha$ por -1). Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos que $\frac{1+1/x}{2} \geq 1$, o que implica em $\alpha = 0$ neste caso. Mas, $1 + 1/x = 2$ se, e somente se $x = 1$. Logo, em ambos os casos, x tem módulo igual a 1.
Como $r = 1$, segue que $x = e^{\theta i}$ e, portanto, $x^n = e^{\theta ni}$ e $x^{-n} = e^{-\theta ni}$. Logo,

$$\begin{aligned}x^n + 1/x^n &= e^{\theta ni} + e^{-\theta ni}\\ &= 2\cos(n\theta).\end{aligned}$$

Por outro lado, note que $2\cos\theta = x + 1/x = 2\cos\alpha$. Assumindo que $\theta, \alpha \in [-\pi, \pi]$, devemos ter $\theta = \pm\alpha$. Em ambos os casos, segue que $\cos(n\theta) = \cos(n\alpha)$. Logo, concluímos que

$$\begin{aligned}x^n + 1/x^n &= e^{\theta ni} + e^{-\theta ni}\\ &= 2\cos(n\alpha),\end{aligned}$$

como queríamos.

6. Um lado da inclusão é fácil: se $z^d = 1$, então

$$(z^d)^{n_0} = 1 \qquad \text{e} \qquad (z^d)^{m_0} = 1,$$

onde $n = d \cdot n_0$ e $m = d \cdot m_0$. Portanto,

$$\{z \in \mathbb{C} | z^d = 1\} \subseteq A \cap B.$$

Para o outro lado, observe que $z^n = z^m = 1$ se e somente se

$$z = \cos\left(\frac{2\pi a}{m}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi a}{m}\right)$$

e

$$z = \cos\left(\frac{2\pi b}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi b}{n}\right),$$

onde $a, b \in \mathbb{Z}$. Sem perda de generalidade, suponha que $2\pi a/m, 2\pi b/n \in [0, 2\pi]$. Assim, para que as desigualdades acima sejam verdadeiras, devemos ter

$$\frac{2\pi a}{m} = \frac{2\pi b}{n} \iff a = \frac{bm}{n} = \frac{bm_0}{n_0}.$$

Como a é inteiro e n_0 e m_0 não têm fatores em comum, segue que n_0 deve dividir b. Assim, podemos escrever $b = b_0 \cdot n_0$, onde $b_0 \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, temos

$$z = \cos\left(\frac{2\pi b_0}{d}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi b_0}{d}\right),$$

o que implica em $z^d = 1$, como queríamos.

7. Observe que

$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \\ i\,sen\,x + i\,sen\,2x + i\,sen\,3x + i\,sen\,4x = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações acima, segue que

$$1 + e^{xi} + e^{2xi} + e^{3xi} + e^{4xi} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $1 - e^{xi}$, segue que

$$1 - e^{5xi} = 0 \iff e^{5xi} = 1.$$

Assim, segue que o menor ângulo positivo que satisfaz o sistema de equações é $x = 2\pi/5$, que é equivalente a $72°$.

8. Como $e^{i\theta} = sen\,\theta + i\cos\theta$, devemos encontrar a parte imaginária do seguinte número complexo:

$$z = e^{ai} + e^{(a+r)i} + e^{(a+2r)i} + \cdots + e^{(a+nr)i}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} z &= e^{ai} \cdot (1 + e^{ri} + e^{2ri} + \cdots + e^{nri}) \\ &= e^{ai} \cdot \left(\frac{e^{(n+1)ri} - 1}{e^{ri} - 1}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração acima por $e^{-ri} - 1$, segue que

$$z = \frac{e^{(a+nr)i} - e^{(a-r)i} - e^{(a+(n+1)r)i} + e^{ai}}{2 - e^{ri} - e^{-ri}}$$

Assim, temos que

$$\operatorname{Im} z = \frac{sen(a+nr) - sen(a-r) - sen(a+(n+1)r) + sen\,a}{2 - 2\cos r}$$

9. Observe que $i = e^{\pi i/2}$. Logo,

$$i^i = (e^{\pi i/2})^i = e^{-\pi/2},$$

como queríamos.

Material elaborado por Letícia Mattos.