Trigonometria I

Círculo Trigonométrico

2° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Trigonometria I
Círculo Trigonométrico

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual dos arcos abaixo é côngruo de 90^o?

a) 430^o.

b) 440^o.

c) 450^o.

d) 460^o.

e) 470^o.

Exercício 2. Quais são os quadrantes do círculo trigonométrico no qual o cosseno é positivo?

a) 1^o e 2^o.

b) 1^o e 3^o.

c) 1^o e 4^o.

d) 2^o e 3^o.

e) 2^o e 4^o.

Exercício 3. Qual dos arcos abaixo é côngruo de $-\dfrac{11\pi}{3}$?

a) $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\dfrac{\pi}{3}$.

c) $\dfrac{2\pi}{3}$.

d) $\dfrac{4\pi}{3}$.

e) $\dfrac{5\pi}{3}$.

Exercício 4. Qual das alternativas abaixo apresenta o mesmo valor que $\operatorname{sen} 150^o$?

a) $\operatorname{sen} 210^o$.

b) $-\operatorname{sen} 150^o$.

c) $\cos 150^o$.

d) $\cos 300^o$.

e) $-\cos 210^o$.

f) $\operatorname{sen} 30^o$.

Exercício 5. Se $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{5}$, para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, então $\cos\alpha$ é:

a) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

b) $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

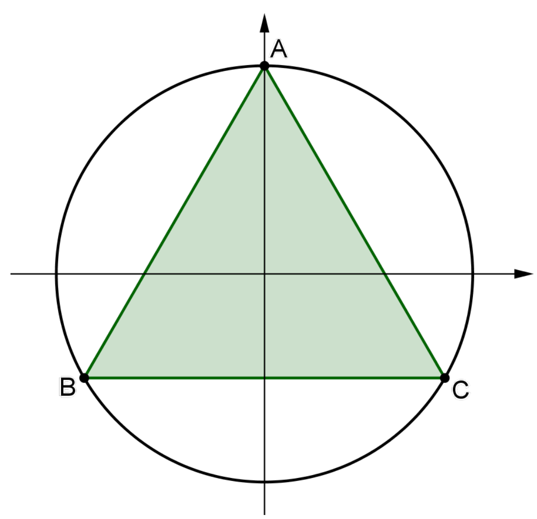
Exercício 6. Represente no ciclo trigonométrico as extremidades dos arcos cujas medidas são:

a) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

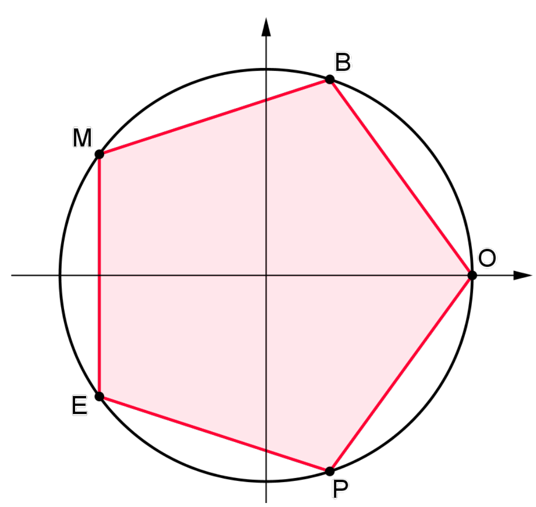
b) $y = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $z = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

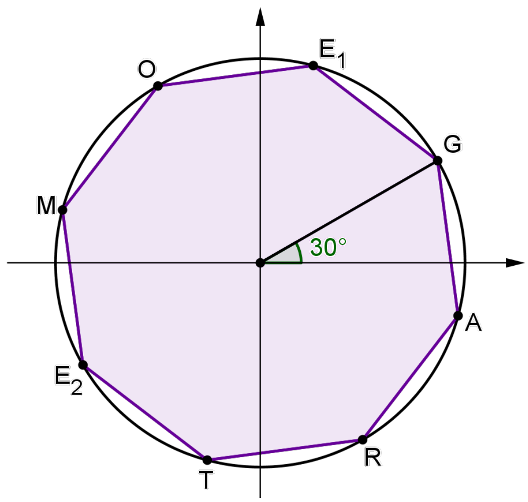
Exercício 7. Os polígonos regulares das figuras estão inscritos nas circunferências trigonométricas. Determine em graus e em radianos as primeiras determinações positivas dos arcos cujas extremidades são vértices de cada polígono:



a)



b)



c)

Exercício 8. Calcule a primeira determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos côngruos de:

a) 1.230^o.

b) -2.160^o.

c) $\dfrac{27\pi}{4}$.

d) $\dfrac{23\pi}{3}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Sendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, com $90^o < x < 180^o$, calcule $\cos x$.

Exercício 10. Determine o valor de:

a) $\operatorname{sen} 1.080^o$.

b) $\cos 1.530^o$.

c) $\operatorname{sen}(-2.850^o)$.

d) $\cos(-3.240^o)$.

Exercício 11. Se x é um número real que verifica simultaneamente as equações $\operatorname{sen} a = x + 3$ e $\cos a = \sqrt{10 - x^2}$, para algum número real a, encontre o valor de x.

Exercício 12. Determine o valor da expressão $\operatorname{sen} 6\pi + \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{2} - \operatorname{sen} \dfrac{25\pi}{6}$.

Exercício 13. Calcule o valor numérico da expressão $E = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) - \cos(4x)}{\operatorname{sen}^3(3x) - \cos^2 x}$, para $x = 90^o$.

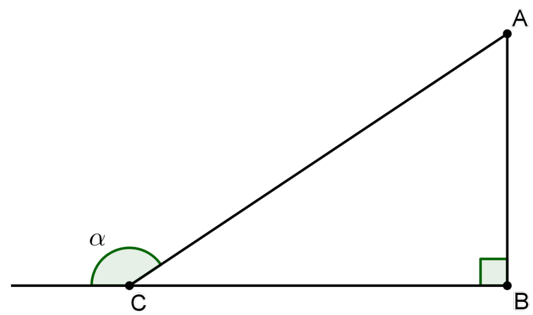
Exercício 14. Represente no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos α tal que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{2}$.

b) $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 15. Calcule a medida do cateto AB no triângulo retângulo ABC abaixo, em que $CB = 40$ e $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{5}$.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Determine x em função de α, na equação $x^2 + 2x + \cos^2 \alpha = 0$

Exercício 17. O menor valor não negativo côngruo ao arco de $\dfrac{21\pi}{5}$ *rad* é igual a:

a) $\dfrac{\pi}{5}$ *rad*.

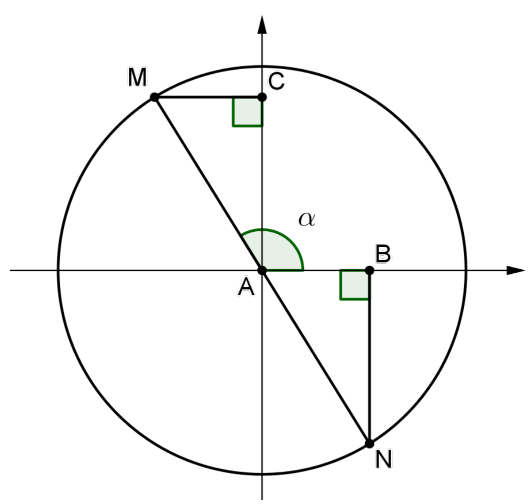
b) $\dfrac{7\pi}{5}$ *rad*.

c) π *rad*.

d) $\dfrac{9\pi}{5}$ *rad*.

e) 2π *rad*.

Exercício 18. A figura a seguir representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo α mede $\dfrac{5\pi}{6}$ radianos.



A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é:

a) $26\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{3}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

e) 11.

Exercício 19. O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

a) 27^o.

b) 30^o.

c) 36^o.

d) 42^o.

e) 72^o.

Exercício 20. Se $k = 1, 2, 3, ...$, o número de valores distintos de $\cos \dfrac{k\pi}{7}$ é:

a) 2.

b) 6.

c) 8.

d) 16.

e) infinito.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

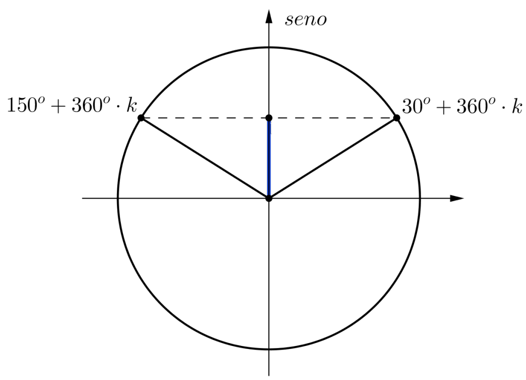
Respostas e Soluções.

1. Os arcos côngruos de 90^o são $90^o + 360^o \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $k = 1$, temos 450^o côngruo de 90^o. Resposta C.

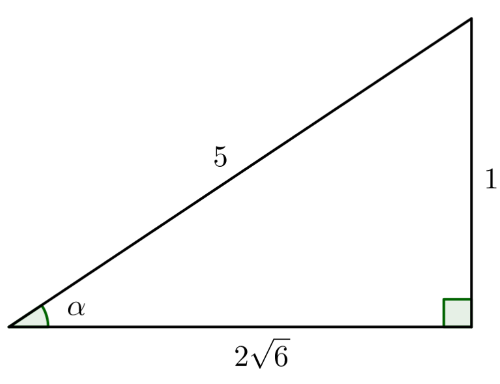
2. C.

3. Temos $-\dfrac{11\pi}{3}$ côngruo de $-\dfrac{11\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $k = 2$ temos o arco $\dfrac{\pi}{3}$ côngruo de $-\dfrac{11\pi}{3}$. Resposta B.

4. Como 150^o pertence ao 2^o quadrante, então, além dos côngruos de 150^o, temos os simétricos de 150^o no primeiro quadrante, que são $180^o - 150^o = 30^o$ e seus côngruos. Resposta E.



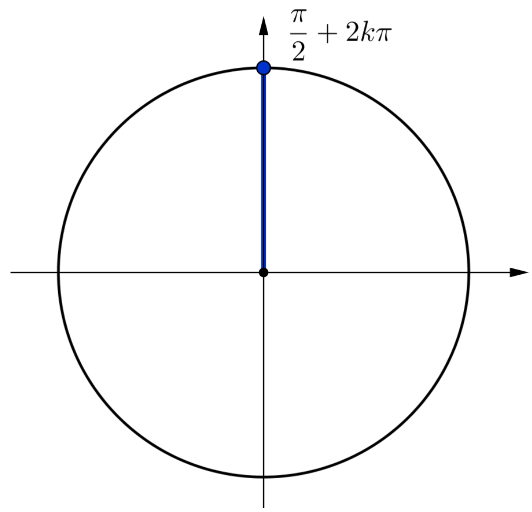
5. Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, temos que, se $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{5}$, então podemos utilizar medidas 1 e 5, respectivamente, para o cateto oposto, em relação ao ângulo α, e hipotenusa.



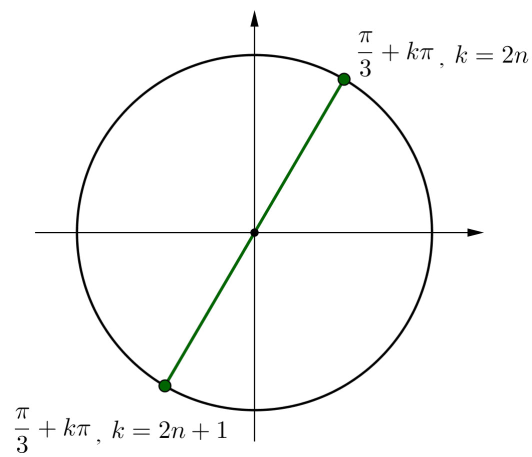
Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto adjacente é $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Portanto, $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. Resposta A.

6.

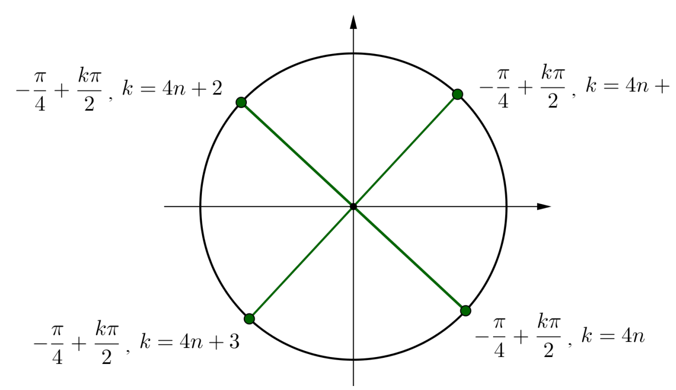
a) Temos:



b) Seja $n \in \mathbb{Z}$, temos então:



c) Seja $n \in \mathbb{Z}$, temos:



7.

a) $A = 90^o$, $B = 90^o + 120^o = 210^o$ e $C = 90^o + 2 \cdot 120^o = 330^o$ ou $A = \dfrac{\pi}{2}$ *rad*, $B = \dfrac{7\pi}{6}$ *rad* e $C = \dfrac{11\pi}{6}$ *rad*.

b) $O = 0^o$, $B = 0^o + 72^o = 72^o$, $M = 0^o + 2 \cdot 72^o = 144^o$, $E = 0^o + 3 \cdot 72^o = 216^o$ e $P = 0^o + 4 \cdot 72^o = 288^o$ ou $O = 0$ *rad*, $B = \dfrac{2\pi}{5}$ *rad*, $M = \dfrac{4\pi}{5}$ *rad*, $E = \dfrac{6\pi}{5}$ *rad* e $P = \dfrac{8\pi}{5}$ *rad*.

c) $G = 30^o$, $E_1 = 30^o + 45^o = 75^o$, $O = 30^o + 2 \cdot 45^o = 120^o$, $M = 30^o + 3 \cdot 45^o = 165^o$, $E_2 = 30^o + 4 \cdot 45^o = 210^o$, $T = 30^o + 5 \cdot 45^o = 255^o$, $R = 30^o + 6 \cdot 45^o = 300^o$ e $A = 30^o + 7 \cdot 45^o = 345^o$ ou $G = \dfrac{\pi}{6}$ *rad*, $E_1 = \dfrac{5\pi}{12}$ *rad*, $O = \dfrac{2\pi}{3}$ *rad*, $M = \dfrac{11\pi}{12}$ *rad*, $E_2 = \dfrac{7\pi}{6}$ *rad*, $T = \dfrac{17\pi}{12}$ *rad*, $R = \dfrac{5\pi}{3}$ *rad* e $A = \dfrac{23\pi}{12}$ *rad*.

8.

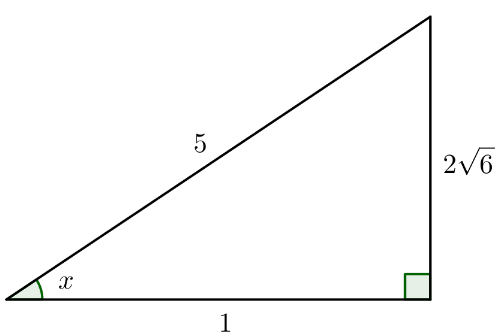
a) $1.230^o = 3 \cdot 360^o + 150^o$. Portanto, a primeira determinação positiva é 150^o e seus arcos côngruos são $150^o + 360^o \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $-2.160^o = -6 \cdot 360^o$. Portanto, a primeira determinação positiva é 360^o e seus arcos côngruos são $360^o \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\dfrac{27\pi}{4} = 3 \cdot 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$. Portanto, a primeira determinação positiva é $\dfrac{3\pi}{4}$ e seus arcos côngruos são $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\dfrac{23\pi}{3} = 3 \cdot 2\pi + \dfrac{5\pi}{3}$. Portanto, a primeira determinação positiva é $\dfrac{5\pi}{3}$.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Como x pertence ao 2^o quadrante, então $\cos x$ é negativo. Agora, usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, temos que, se $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, então podemos utilizar medidas $2\sqrt{6}$ e 5, respectivamente, para o cateto oposto, em relação ao ângulo x, e hipotenusa.



Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto adjacente é 1. Portanto, $\cos x = -\dfrac{1}{5}$.

10.

a) $\operatorname{sen} 1.080^o = \operatorname{sen} 0^o = 0$.

b) $\cos 1.530^o = \cos 90^o = 0$.

c) $\operatorname{sen}(-2.850^o) = \operatorname{sen} 30^o = \dfrac{1}{2}$.

d) $\cos(-3.240^o) = \cos 0^o = 1$.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Tomando $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$, temos:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} a)^2 + (\cos a)^2 &= 1\\
(x+3)^2 + \left(\sqrt{10 - x^2}\right)^2 &= 1\\
x^2 + 6x + 9 + 10 - x^2 &= 1\\
6x &= -18\\
x &= -3.
\end{aligned}$$

12.

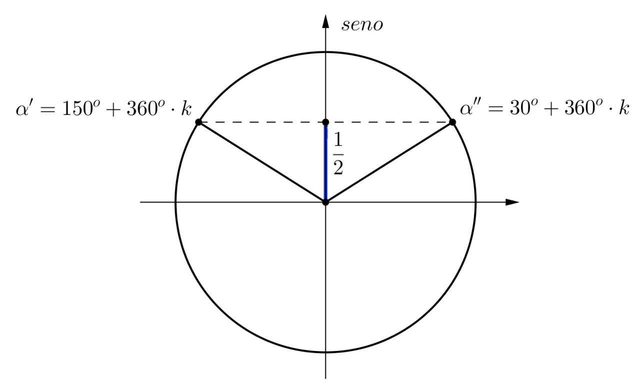
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 6\pi + \operatorname{sen} \frac{7\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{25\pi}{6} &=\\
\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} &=\\
0 - 1 - \frac{1}{2} &= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

13. (Extraído da Vídeo Aula)

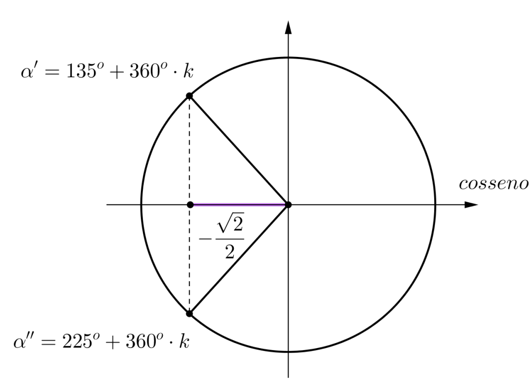
$$\begin{aligned}
E &= \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) - \cos(4x)}{\operatorname{sen}^3(3x) - \cos^2 x}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 90^o + \operatorname{sen} 180^o - \cos 360^o}{\operatorname{sen}^3 270^o - \cos^2 90^o}\\
&= \frac{1 + 0 - 1}{(-1)^3 - 0^2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

14.

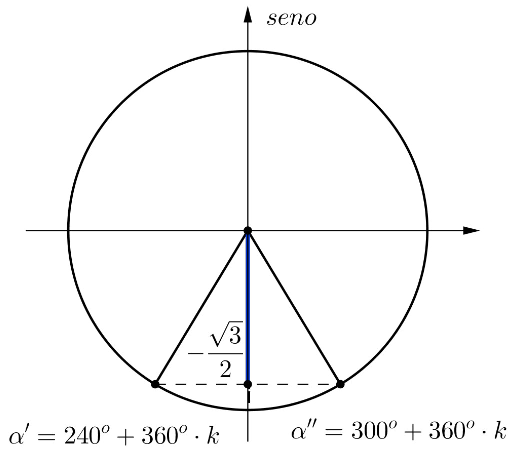
a) Existem dois conjuntos de arcos côngruos para os quais $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{2}$. Chamando-os de α' e α'' e $k \in \mathbb{Z}$, temos:



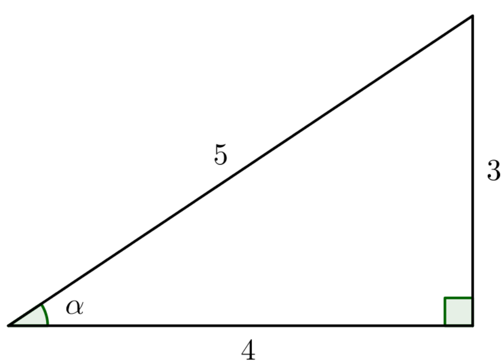
b) Existem dois conjuntos de arcos côngruos para os quais $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Chamando-os de α' e α'' e $k \in \mathbb{Z}$, temos:



c) Existem dois conjuntos de arcos côngruos para os quais $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chamando-os de α' e α'' e $k \in \mathbb{Z}$, temos:



15. (Extraído da Vídeo Aula) Como α e $\angle ACB$ são suplementares, então $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\angle ACB) = \dfrac{3}{5}$. Vamos utilizar um outro triângulo para calcular $\cos\alpha$:



Sendo assim, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5} = \dfrac{40}{AC}$, donde $AC = 50$. Por fim, temos $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5} = \dfrac{AB}{50}$, segue que $AB = 30$.

16. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cos^2\alpha}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4(1-\cos^2\alpha)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4\operatorname{sen}^2\alpha}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\,|\operatorname{sen}\alpha|}{2} \\ &= -1 \pm |\operatorname{sen}\alpha|\,. \end{aligned}$$

17. (Extraído da UFMA) $\dfrac{21\pi}{5} = \dfrac{20\pi + \pi}{5} = 4\pi + \dfrac{\pi}{5}$. Portanto, o menor arco côngruo não negativo de $\dfrac{21\pi}{5}$ é $\dfrac{\pi}{5}$. Resposta A.

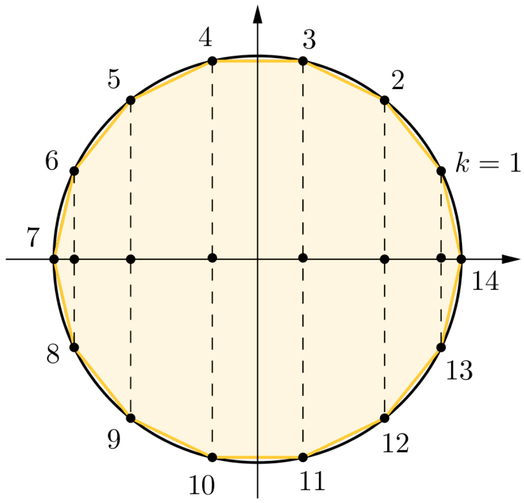
18. (Extraído do CEFET - MG)

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \\ \frac{\cos(\alpha + 180^o)}{\operatorname{sen}\alpha} &= \\ \frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} &= \\ \frac{-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} &= \\ \frac{-\cos 150^o}{\operatorname{sen} 150^o} &= \\ \frac{\cos 30^o}{\operatorname{sen} 30^o} &= \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Resposta B.

19. (Extraído da FUVEST - SP) Vamos supor inicialmente que os ponteiros estejam ambos apontando para o 12, ou seja, exatamente $12h$. O ponteiro dos minutos vai girar por uma hora (uma volta completa) e o ponteiro das horas já está apontando para o 1, marcando exatamente $1h$ neste momento. O ponteiro dos minutos continuará girando por mais 12 min, o equivalente a um ângulo, em graus, de $6 \cdot 12 = 72^o$. O ponteiro das horas vai girar $\dfrac{30^o \cdot 12}{60} = 6^o$ graus, lembrando que este último ponteiro já se encontrava 30^o afastado do ponto de partida. Assim, o ângulo agudo formado pelos ponteiros é $72^o - 36^o = 36^o$. Resposta C.

20. (Extraído da Cesgranrio) Temos $\cos 0 = \cos 2\pi$, para $k = 0$ (supondo que pudesse) e $k = 14$, respectivamente. Sendo assim, teremos valores de cosseno iguais para $k = 1$ e $k = 15$, para $k = 2$ e $k = 16$ e assim por diante. Vamos agora analisar apenas $k = 1, 2, ..., 14$: por simetria no círculo trigonométrico, temos os mesmos valores para $k = 1$ e $k = 13$, $k = 2$ e $k = 12$ e assim por diante, formando pares, com exceção de $k = 7$ e $k = 14$, que não formam pares. Sendo assim, são $6 + 1 + 1 = 8$ valores distintos. Resposta C.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com