

# Módulo de Juros e Porcentagem

## Juros Simples e Compostos

Sétimo Ano



## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Um investidor quer aplicar a quantia de R\$ 800,00 por 3 meses, a uma taxa de 8% ao mês (a.m.) em juros simples, para retirar no final deste período. Quanto ele irá retirar?

**Exercício 2.** Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R\$ 9.500,00 produzir um montante de R\$ 11.900,00 ao fim de 1 ano de aplicação?

**Exercício 3.** O preço à vista de um eletrodoméstico é R\$ 350,00. Dando-se uma entrada de R\$ 80,00, o restante será pago com um cheque com vencimento para 3 meses depois da compra incluindo um acréscimo de juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor do cheque?

**Exercício 4.** Esmeraldino aplicou R\$ 800,00, a juros simples, a uma taxa de 2,5% ao mês e, ao final de um certo tempo, recebeu R\$ 1.080,00. Quanto tempo ela deixou o dinheiro aplicado a essa taxa?

**Exercício 5.** Determine quanto renderá, em juros simples, um capital de R\$ 60.000,00 aplicado à taxa de 24% ao ano, durante sete meses.

**Comentário para professores:.** Sugerimos apenas após os problemas iniciais, a introdução das fórmulas:

$$M = C + J \text{ e } J = Cin,$$

onde  $M$  é o montante,  $C$  o capital,  $i$  a taxa de juros e  $n$  o prazo do investimento.

**Exercício 6.** A que taxa mensal de juros simples um capital de R\$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R\$ 150,00 de juros?

**Exercício 7.** Mário devia, em seu cartão de crédito, R\$ 2.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 2.880,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

**Exercício 8.** Um certo capital foi aplicado por 5 meses. Ao fim desse prazo, só de juros simples, o aplicador recebeu o triplo do dinheiro. Qual é a taxa mensal dessa aplicação?

**Exercício 9.** Por um empréstimo de R\$ 80000,00, à taxa de  $i\%$  ao mês, paga-se, de uma única vez, após 2 meses, o montante de R\$ 115200,00. Por terem sido aplicados juros compostos, qual a taxa mensal aplicada?

**Exercício 10.** Um capital quadruplica em 2 meses ao se utilizar de capitalização composta. Qual a taxa mensal aplicada?

**Exercício 11.** Uma aplicação de R\$ 3.000,00 rendeu R\$ 2.370,00 em 10 meses. Qual a taxa mensal composta de juros dessa operação?

**Exercício 12.** O preço do cento laranja teve dois aumentos consecutivos: 10% e 20%. Se hoje o cento da laranja custa R\$5,28, determine o seu preço antes dos aumentos.

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 13.** O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R\$ 100,00, qual o preço daqui a 3 anos?

**Exercício 14.** João fez um empréstimo de R\$ 800,00 em uma financeira, que cobra uma taxa de juros de 10% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em dois meses. No fim do primeiro mês, Pedro pagou à financeira uma parcela de R\$ 580,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para João pagar ao final do segundo mês?

**Exercício 15.** Maria pegou no banco um empréstimo de R\$ 2000,00, que cobra uma taxa de juros de 5% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em quatro meses. No fim do primeiro mês, Maria pagou uma parcela de R\$ 600,00. No fim do segundo mês, ela pagou R\$ 575,00. No fim do terceiro mês, pagou R\$ 550,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para Maria pagar ao final do quarto mês?

**Exercício 16.** Duas pessoas fizeram um empréstimo de uma mesma quantia por dois meses, nas seguintes condições:

- A primeira, a juros compostos de 2% a.m.
- A segunda, a juros simples de  $x\%$  a.m.

Sabendo-se que, ao quitar à dívida, as duas pagaram o mesmo valor, qual o valor de  $x$ ?

**Exercício 17.** Uma pessoa aplicou metade do seu capital à taxa de 30% ao semestre no regime de juros compostos e a outra metade à taxa de 27% ao quadrimestre no sistema de juros simples e obteve ao final de um ano um montante de R\$ 4.200,00. Qual o capital inicial desta pessoa?

**Exercício 18.** Uma quantia de  $x$  reais foi aplicada a juros compostos de 1% ao mês. Ao final de 10 meses, foi feito o resgate total da aplicação, obtendo-se  $y$  reais. Qual a razão  $\frac{y}{x}$ ?

**Exercício 19.** Um investidor fez uma aplicação a juros simples de 10% mensal. Depois de dois meses, retirou capital e juros e os reaplicou a juros compostos de 20% mensal, por mais dois meses e, no final do prazo, recebeu R\$ 1728,00. Qual o valor do capital inicial?

**Exercício 20.** Daqui a seis meses você deve saldar uma dívida de R\$ 520,00. Que importância deve aplicar hoje ao juro simples de 5% ao mês para que, no prazo devido, você esteja com a quantia devida?

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 21.** Se o comprimento de um retângulo é aumentado de 20% e sua largura é aumentada de 50%, de quanto aumenta sua área?

**Exercício 22.** Se um automóvel custa hoje R\$ 45000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 4%, qual o seu valor, em reais, daqui a dez anos?

**Exercício 23.** Um capital aplicado no prazo de dois anos, a uma taxa de juros compostos de 40% ao ano, resulta no montante de R\$ 9800,00. Sendo  $x\%$  a taxa anual de juros simples que, aplicada ao mesmo capital durante o mesmo prazo, resultará no mesmo montante, determine  $x$ .

**Exercício 24.** Um carro foi testado durante 10 dias para verificar o bom desempenho e poder ser lançado no mercado com bastante sucesso. No primeiro dia do teste, ele percorreu 80km e, nos dias subsequentes, houve um aumento de 5% da quilometragem rodada em relação à quilometragem do dia anterior. Nessas condições, qual foi a quilometragem do último dia de testes?

**Exercício 25.** Um país contratou em 1839 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em cem anos à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e dívida foi sendo “rolada”, com capitalização anual de juros. Qual o valor valores abaixo está mais próximo do valor da dívida em 1999?  
Para os cálculos adote  $(1,09)^8 \cong 2$ .

**Exercício 26.** Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

**Exercício 27.** Sabe-se que 10% de uma certa população está infectada por um vírus. Um teste para identificar a presença do vírus acerta 90% das vezes quando aplicado em uma pessoa infectada, e apresenta 80% de acertos quando aplicado em uma pessoa que não é portadora do vírus. Qual é a porcentagem de pessoas realmente infectadas entre as pessoas que o teste classificou como infectadas?

**Exercício 28.** Um comerciante fixa o preço de um artigo em reais e centavos de real, de tal maneira que, quando ele acrescenta 4% de imposto, o resultado é um número

inteiro em reais. Qual o menor valor que esse artigo pode ter?

## Respostas e Soluções

### 1 Exercícios Introdutórios

1. O valor 800 reais com taxa de 8% a.m. gera por mês um valor fixo de rendimento, por se tratar de juros simples. A parcela mensal de ganho é de  $8\% \cdot 800 = 64$  reais. Sendo 3 meses de investimento,  $64 \cdot 3 = 192$  reais. Por fim, a retirada será de  $800 + 192 = 992$  reais.

2. Por se tratar de juros simples pode-se aplicar a variação de ganho imediatamente, ou seja, o valor do juros é de  $11900 - 9500 = 2400$  reais. Como foram 12 meses, tem-se 200 reais de ganho fixo por mês. O percentual mensal é  $\frac{200}{9500} = \frac{2}{95} = 0,02105263... \cong 2,11\%$ .

3. O preço era R\$ 350,00 mas houve uma entrada (pagamento) de R\$ 80,00, a dívida com a loja ficou em 270 reais. Com a taxa de juros mensal de  $4\% = 0,04$ , tem-se o valor do juros mensal de  $0,04 \cdot 270 = 10,80$  reais. Como são 3 meses, o valor pago de acréscimo será de  $3 \cdot 10,80 = 32,40$  reais. Logo o cheque será de  $270 + 32,40 = 302,40$  reais.

4. Como o regime é de juros simples e houve um ganho de  $1080 - 800 = 280$ , basta calcular o percentual total de ganho que foi  $\frac{280}{800} = 0,35 = 35\%$ . Para finalizar, basta fazer a divisão pelo percentual mensal,  $\frac{0,35}{0,025} = 14$  meses.

5. Por se tratar de juros simples, a taxa de juros mensal será  $\frac{0,24}{12} = 0,02$ . Como foram 7 meses, houve uma taxa de  $7 \cdot 0,02 = 0,14$  no período. O rendimento será de  $0,14 \cdot 60000 = 8400$  reais.

**Comentário para professores:** Sugerimos apenas após os problemas iniciais, a introdução das fórmulas:

$$M = C + J \text{ e } J = Cin,$$

onde  $M$  é o montante,  $C$  o capital,  $i$  a taxa de juros e  $n$  o prazo do investimento.

6. Substituindo em  $J = Cin$  os valores do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 150 &= 500 \cdot i \cdot 10 \\ i &= \frac{150}{5000} \\ i &= \frac{3}{100} \\ i &= 3\% \end{aligned}$$

7. Do enunciado conclui-se que  $M = 2880$ ,  $C = 2000$ ,  $n = 2$ . Assim

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 880 &= 2000 \cdot i \cdot 2 \\ i &= \frac{880}{4000} \\ i &= \frac{22}{100} \\ i &= 22\% \end{aligned}$$

8. Do enunciado conclui-se que  $J = 3x$ ,  $C = x$ ,  $n = 5$ . Assim

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 3x &= x \cdot i \cdot 5 \\ 3 &= i \cdot 5 \\ i &= \frac{3}{5} \\ i &= 60\% \end{aligned}$$

9. Como se trata de juros compostos, o fator de variação do período foi de  $(1+i)^2$ . Com  $C = 80000$ ,  $M = 115200$ ,  $n = 2$ , temos

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 115200 &= 80000(1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= \frac{115200}{80000} \\ (1+i)^2 &= \frac{144}{100} \\ 1+i &= \sqrt{\frac{144}{100}} \\ 1+i &= \frac{12}{10} \\ 1+i &= 1,2 \\ i &= 0,2 \end{aligned}$$

Resposta: 20%.

10. Do enunciado tem-se:  $C = x$ ,  $M = 4x$  e  $n = 2$  meses. Assim

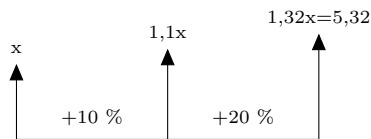
$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 4x &= x \cdot (1+i)^2 \\ \frac{4x}{x} &= (1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= 4 \\ 1+i &= 2 \\ i &= 1 \end{aligned}$$

Resposta: 100%.

11. Do enunciado tem-se:  $J = 2370$ ,  $C = 3000$ ,  $M = 5370$ ,  $i = ?\%$ a.m. e  $n = 10$  meses.

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 5370 &= 3000 \cdot (1+i)^{10} \\ \frac{5370}{3000} &= (1+i)^{10} \\ (1+i)^{10} &= 1,79 \\ 1+i &= \sqrt[10]{1,79} \\ i &= \sqrt[10]{1,79} - 1 \end{aligned}$$

12. Como foram dois aumentos distintos devemos fazer a aplicação, passo a passo, dos fatores 1,1 e 1,2. O que resulta num aumento acumulado de  $1,1 \cdot 1,2 = 1,32$ . Portanto o valor inicial  $x$  se torna  $1,32x$  depois dos dois aumentos. Por fim,  $1,32x = 5,28$  e  $x = \frac{5,28}{1,32} = 4$  reais. Graficamente a situação pode ser representada por:

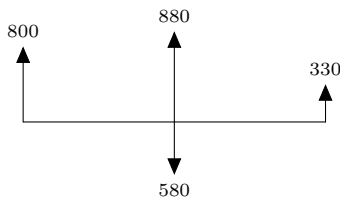


## 2 Exercícios de Fixação

13. Do enunciado tem-se:  $M = ?$ ,  $C = 100$ ,  $i = 100\%$ a.a. e  $n = 3$  meses.

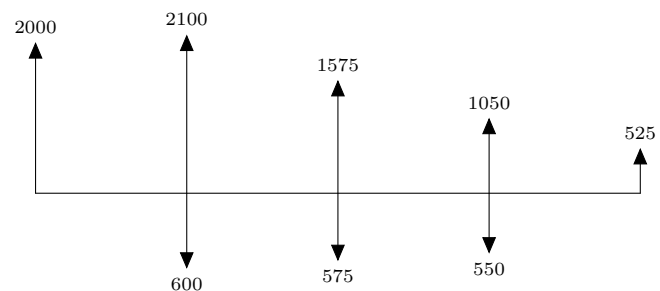
$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ M &= 100 \cdot (1+1)^3 \\ M &= 100 \cdot (2)^3 \\ M &= 100 \cdot 8 \\ M &= 800 \text{ reais.} \end{aligned}$$

14. João tomou 800 reais e a taxa de juros é de  $10\% = 0,1$  ao mês, sendo assim, o fator de variação do saldo devedor é 1,1 a cada mês. O recebimento de 800 reais, depois de um mês sob juros, se transformou em uma dívida de  $1,1 \cdot 800 = 880$ . Nesse momento houve uma amortização da dívida de 580 reais, ficando com saldo devedor de 300 reais. Por fim, mais um mês de juros e o novo valor a pagar é de  $1,1 \cdot 300 = 330$ . O que encerra a dívida. A ilustração abaixo expõe o fluxo do saldo de devedor e dos pagamentos efetuados com o passar do tempo.



Resposta: O último pagamento foi de 330 reais.

15. Maria tomou 2000 reais e a taxa de juros é de  $5\% = 0,05$  ao mês, sendo assim, o fator de variação mensal do saldo devedor é 1,05. Após o primeiro mês, os 2000 reais viraram uma dívida de  $1,05 \cdot 2000 = 2100$ . Nesse momento houve a amortização de 600 reais, ficando com saldo devedor de 1500 reais. Daí, após o segundo mês, a dívida se elevou para  $1,05 \cdot 1500 = 1575$  e houve outra amortização de 575 reais transformando o saldo devedor em 1000 reais. Na sequência, após mais um mês, a dívida passou a ser de  $1,05 \cdot 1000 = 1050$  reais. Ocorreu mais uma amortização 550 reais e saldo devedor passou a ser 500 reais. Por fim, dívida final se transformou em  $1,05 \cdot 500 = 525$  reais. A figura abaixo sugere o fluxo de juros e amortizações até o fim da dívida.



Resposta: O último pagamento foi de 525 reais.

16. (Extraído do vestibular da UNEB)

Sendo  $C$  o valor que as duas pessoas tomaram de empréstimo, o período  $n = 2$  meses, a primeira teve taxa de juros  $i_1 = 0,02$  e a segunda,  $i_2 = \frac{x}{100}$ . Os montantes  $M_1$  e  $M_2$  são iguais. Assim

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ C + C \cdot \frac{x}{100} \cdot 2 &= C(1,02)^2 \\ C(1 + \frac{x}{100} \cdot 2) &= C(1,02)^2 \\ 1 + \frac{x}{50} &= 1,0404 \\ \frac{x}{50} &= 0,0404 \\ x &= 50 \cdot 0,0404 \\ x &= 2,02 \end{aligned}$$

17. Sendo  $2C$  o valor do capital aplicado, metade a  $i_1 = 0,30$  a.s. por  $n_1 = 2$  semestres e a outra metade a  $i_2 = 0,27$  a.q. por  $n_2 = 3$  quadrimestres. A soma dos

montantes  $M_1$  e  $M_2$  fica 4200. Assim

$$\begin{aligned}M_1 &= C(1,3)^2 \\M_1 &= 1,69C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= C + C \cdot 0,27 \cdot 3 \\M_2 &= C + 0,81C \\M_2 &= 1,81C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_1 + M_2 &= 4200 \\1,69C + 1,81C &= 4200 \\3,5C &= 4200 \\C &= \frac{4200}{3,5} \\C &= 1200 \\2C &= 2400 \text{ reais.}\end{aligned}$$

**18.** Do enunciado tem-se:  $M = y$ ,  $C = x$ ,  $i = 1\%$ a.a. e  $n = 10$  anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\y &= x \cdot (1,01)^{10} \\\frac{y}{x} &= (1,01)^{10}\end{aligned}$$

**19.** (Extraído do vestibular da UNEB)  
Iniciando pelos juros simples, um capital “ $c$ ”, com taxa  $i_1 = 0,1$ , por  $n_1 = 2$  meses, gera um resultado de  $1,2c$ . Agora nos juros compostos, um novo capital “ $1,2c$ ” será aplicado pela taxa  $i_2 = 0,2$ , pelo prazo  $n_2 = 2$  meses. Logo,  $M = 1,2c \cdot (1,2)^2$ . Como  $M = 1728$ , tem-se que:  $1728 = (1,2)^3c$  e conseqüentemente  $c = \frac{1728}{1,2^3} = 1000$  reais.

**20.** (Extraído do vestibular da UFPA)  
Tem-se:  $M = 520$ ,  $C = x$ ,  $i = 0,05$  a.m. e  $n = 6$  meses. Assim

$$\begin{aligned}M &= C + J \\M &= C + Cin \\520 &= C(1 + 0,05 \cdot 6) \\520 &= C(1 + 0,3) \\520 &= C(1,3) \\C &= \frac{520}{1,3} \\C &= 400.\end{aligned}$$

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**21.** (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sendo  $c$  o comprimento e  $l$  a largura, a área inicial é  $S = cl$ . Como  $c$  aumentou em  $0,20c$  e  $l$  aumentou em  $0,5l$ , seus novos valores são  $1,2c$  e  $1,5l$ , respectivamente. Então a área  $S'$  é:

$$\begin{aligned}S' &= 1,2c \cdot 1,5l \\&= 1,2c \cdot 1,5l \\&= 1,8S.\end{aligned}$$

Portanto, houve aumento de 80% na área.

**22.** (Adaptado do vestibular da FGV)

Do enunciado tem-se:  $C = 45000$ ,  $i = -4\%$ a.a. e  $n = 10$  anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\M &= 45000 \cdot (0,96)^{10} \\M &= 45000 \cdot (0,96)^{10} \\M &\cong 29917,47 \text{ reais.}\end{aligned}$$

**23.** (Adaptado do vestibular da UFBA)

Do enunciado tem-se:  $M = 9800$ ,  $i = 40\%$ a.a. e  $n = 2$  anos, no sistema de juros compostos, então:

$$\begin{aligned}9800 &= C(1,4)^2 \\C &= \frac{9800}{1,96} \\C &= 5000 \text{ reais.}\end{aligned}$$

Passando para juros simples:  $M = 9800$ ,  $C = 5000$ ,  $i = x\%$ a.a. e  $n = 2$  anos, tem-se:

$$\begin{aligned}9800 &= 5000 + 5000 \cdot \frac{x}{100} \cdot 2 \\100x &= 4800 \\x &= 48.\end{aligned}$$

**24.** (Extraído do vestibular da UNEB)

Depois de 10 dias com acréscimos diários de 5%, tem-se 9 acréscimos com fatores de variação de  $(1,05)$ , sendo assim:  $80(1,05)^9 \cong 80 \cdot 1,551 = 124,08$  km.

**25.** (Adaptado do vestibular da FUVEST)

Do enunciado tem-se:  $M = ?$ ,  $C = 10^6$ ,  $i = 9\%$ a.a. e  $n = 1999 - 1839 = 160$  anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\M &= 10^6 \cdot (1,09)^{160} \\M &= 10^6 \cdot ((1,09)^8)^{20} \\M &= 10^6 \cdot 2^{20}\end{aligned}$$

Resposta: A dívida estava em  $2^{20} \cdot 10^6$  dólares.

**26.** (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)

Com as reduções de 50%, 40% e 10%, tem-se respectivamente os fatores de variação de

$$(1 - 0,5) = 0,5, (1 - 0,4) = 0,6 \text{ e } (1 - 0,1) = 0,9.$$

O fator acumulado foi

$$0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,27.$$

Logo, reduziu-se  $1 - 0,27 = 0,73$ .

**27.** (Extraído do PAPMEM 2014.2)

Suponha que a população seja de 1000 pessoas. Das quais 100 estão infectadas. Dentre essas, o teste acerta 90% das vezes, portanto o teste identificou 90 pessoas com o vírus (e de fato elas o têm). No grupo das que não estão doentes, 20% são falsos positivos, portanto  $0,20 \cdot 900 = 180$  estão sadias mas com teste positivo. Daí, as pessoas que o teste identificou com infectadas foram  $90 + 180 = 270$  e as que estão com o vírus (pelo teste) foram 90. Por fim, o percentual fica em  $\frac{90}{270} = \frac{1}{3} \cong 33,33\%$ .

**Comentário para professores:** O valor arbitrário referência de 1000 não a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso todos os valores envolvidos sejam multiplicados por uma mesma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o número 1000 por  $p$  arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

**28.** (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sejam  $x$  e  $y$  ( $0 \leq y \leq 99$ ) tais o preço do artigo é  $x$  reais mais  $y$  centavos sem a cobrança do imposto. Com o imposto, ele passa a ser  $P = 1,04 \left( x + \frac{y}{100} \right)$ , com  $P \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} P &= 1,04 \left( x + \frac{y}{100} \right) \\ &= \frac{104x}{100} + \frac{104y}{10000} \\ &= \frac{26x}{25} + \frac{13y}{1250} \\ &= \frac{1300x + 13y}{1250} \\ &= \frac{13(100x + y)}{1250} \end{aligned}$$

Como  $P$  é inteiro positivo, e 13 é relativamente primo com 1250, então 1250 deve dividir  $100x + y$ . O menor múltiplo positivo de 1250 é o próprio 1250. Para que  $100x + y = 1250$  basta que  $x = 12$  e  $y = 50$ . Veja que  $y$  satisfaz a condição:  $0 \leq y \leq 99$ . Assim, o menor valor procurado é R\$12,50.