Módulo Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal

Desenvolvimento Multinomial.

2° ano/E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal. Desenvolvimento Multinomial.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1+3x)^6$?

Exercício 2. Desenvolvendo $(x+2)^9$, determine:

a) o coeficiente de x^2.

b) o coeficiente de x^5.

c) o termo independente de x.

Exercício 3. Desenvolvendo o binômio $(x - \frac{1}{x^2})^{12}$, determine:

a) o coeficiente de x^3.

b) o termo independente de x.

Exercício 4. Qual o coeficiente de xyz no desenvolvimento de $(x+y+z)^3$.

Exercício 5. Determine o coeficiente de x^{12} no desenvolvimento de $(1+2x+x^3)^4$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Qual o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(1-3x+2x^2)^{10}$?

Exercício 7. Qual o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^{10}$?

Exercício 8. Qual o coeficiente do termo $x^2y^3z^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^7$?

Exercício 9. Determine o termo independente de x em $(1+x+\frac{2}{x})^3$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Qual o coeficiente de x^7 na expressão $(2+3x+x^2)^4$?

a) 18.

b) 16.

c) 14.

d) 12.

e) 10.

Exercício 11. Num jogo, pontos são ganhos somando-se os valores obtidos ao se jogarem dois dados em forma de tetraedro regular, cujas faces são numeradas 1, 2, 3 e 4. O valor obtido é aquele que está na face voltada para baixo.

a) Desenvolva $(x^1+x^2+x^3+x^4)(x^1+x^2+x^3+x^4)$.

b) Mostre que o número de maneiras de se obter n pontos utilizando estes dados é igual ao coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(x^1+x^2+x^3+x^4)(x^1+x^2+x^3+x^4)$. Por exemplo, o coeficiente de x^6 é 3 e há três maneiras distintas de se obter 6 pontos: $(2+4)$, $(3+3)$ e $(4+2)$.

c) Por defeito de fabricação, um jogo veio com um dado numerado 1, 2, 2 e 3 e o outro, 1, 3, 3 e 5. Ao receber o jogo para substituição, o dono da fábrica, que era matemático, argumentou que o jogo não mudaria mesmo utilizando os dados defeituosos, isto é, que o número de maneiras de se obter n pontos, $2 \leqslant n \leqslant 8$, com os dados defeituosos e com os dados normais era o mesmo. Ele tinha razão? Explique.

Exercício 12. Em *Terra Brasilis* ocorre um importante campeonato de futebol envolvendo 22 clubes. Cada equipe enfrenta uma vez cada uma das demais, recebendo: 5 pontos por vitória, quando esta for por diferença superior a dois gols; 3 pontos por vitória quando esta for por diferença de um ou dois gols; 1 ponto por empate; e 0 ponto por derrota.

a) De quantas maneiras distintas uma equipe pode pontuar em seus 21 jogos? Observação: obter 1 ponto na primeira partida e 5 na segunda e obter 5 pontos na primeira partida e 1 na segunda são maneiras distintas de se pontuar nas duas primeiras partidas.

b) Mostre que o número de maneiras distintas de, ao final do campeonato, uma equipe totalizar k pontos, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $(x^0+x^1+x^3+x^5)^{21}$.

Exercício 13. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^9$.

Exercício 14. Qual o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de $(1+x^5+x^7)^{20}$?

a) 0.

b) 1210.

c) 3000.

d) 3420.

e) 4000.

Exercício 15. Qual o soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(a+b+c)^{100}$?

Exercício 16. Qual o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de

(a) $(1+x+x^2)^5$?

(b) $(1+x+x^2)^6$?

(c) $(1+x+x^2)^6$?

Exercício 17. (a) Qual o coeficiente de x^2yz no desenvolvimento de $(x+y+z)^4$?

(b) Qual o coeficiente de $x^{11}yz$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^{13}$?

(c) Qual o coeficiente de $x^{18}yz$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^{20}$?

Exercício 18.

(a) Qual o coeficiente de x^2y^2z no desenvolvimento de $(x+y+z)^5$?

(b) Qual o coeficiente de x^2y^7z no desenvolvimento de $(x+y+z)^{10}$?

(c) Qual o coeficiente de $x^2y^{19}z$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^{22}$?

Exercício 19.

(a) Qual o coeficiente de $x^1y^2w^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z+w)^5$?

(b) Qual o coeficiente de $x^1y^{10}w^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z+w)^{13}$?

(c) Qual o coeficiente de $x^1y^{20}w^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z+w)^{23}$?

Exercício 20. Observe o modelo

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\ (1+1)^3 &= (1)^3+3(1)^2(1)+3(1)(1)^2+(1)^3 \\ 8 &= 1+3+3+1. \end{aligned}$$

e, em seguida, determine a soma de todos os coeficientes dos termos da forma $x^iy^iz^k$ no desenvolvimento multinomial de:

(a) $(2x+y-z)^2$;

(b) $(2x+y-z)^6$;

(c) $(3x+y-z)^6$.

Exercício 21. Observe o modelo

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \\ (1+1+0)^2 &= (1)^2+(1)^2+(0)^2+2(1)(1)+ \\ &+ \ 2(1)(0)+2(1)(0) \\ 4 &= (1)^2+(1)^2+2(1)(1) \end{aligned}$$

e, em seguida, determine a soma de todos os coeficientes dos termos que não possuem a variável z no desenvolvimento multinomial de:

(a) $(2x+y-z)^2$;

(b) $(2x+y-z)^6$;

(c) $(3x+y-z)^6$.

Exercício 22. O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é:

a) 3150 b) 6300 c) 75600 d) 81900 e) 151200

Exercício 23. No desenvolvimento de $(ax^2-2bx+c+1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a+b+c$ é igual a:

a) $-1/2$ b) $-1/4$ c) $1/2$ d) 1 e) $3/2$.

Respostas e Soluções.

1. Usando a *fórmula do termo geral*, para binômios, temos:

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{6}{p} \cdot 1^{6-p} \cdot (3x)^p \\ T_{p+1} &= \binom{6}{p} \cdot (3x)^p \\ T_{p+1} &= \binom{6}{p} \cdot 3^p \cdot x^p. \end{aligned}$$

Como queremos o coeficiente de x^2, temos $p = 2$, ou seja, o coeficiente é $\binom{6}{p} \cdot 3^p = \binom{6}{2} \cdot 3^2 = 15 \cdot 9 = 135$.

Outra maneira de se resolver este problema é pensar na definição de potência, ou seja, $(1+3x)^6$ é o mesmo que $(1+3x)$ vezes ele mesmo seis vezes. Essa multiplicação deve ser feita escolhendo-se 1 ou $3x$ em cada um dos seis termos, sendo que isso é feito para todas as $2^6 = 64$ possibilidades possíveis e todos esses 64 termos obtidos, alguns deles semelhantes, são somados ao final. Como queremos saber o coeficiente de x^2, devemos tomar apenas duas vezes $3x$ e quatro vezes 1, e isso pode ser feito de $\binom{6}{2} = 15$ maneiras diferentes. Assim, o coeficiente de x^2 é $15 \cdot 3^2 = 135$, pois tomamos $3x$ duas vezes.

2.

a) Para obtermos x^2 na multiplicação dos nove termos $(x+2)$ por ele mesmo, devemos tomar x duas vezes e, consequentemente, 2 sete vezes. Temos então que o coeficiente de x^2 é $\binom{9}{2} \cdot 2^7 = \dfrac{9!}{7!2!} \cdot 128 = 36 \cdot 128 =$ 4.608.

b) Usando o mesmo o mesmo raciocínio do item a, temos que o coeficiente de x^5 é $\binom{9}{5} \cdot 2^4 = \dfrac{9!}{5!4!} \cdot 16 = 126 \cdot 16 =$ 2.016.

c) Como queremos o termo independente de x, apenas 2 pode entrar na multiplicação, e isso ocorre apenas de uma maneira, ou seja, o termo independente é $2^9 = 512$.

3.

(a) Podemos escrever $(x - \dfrac{1}{x^2})^{12}$, como $(x - x^{-2})^{12}$, donde teremos doze multiplicações de $(x - x^{-2})$. Nessas doze multiplicações, como queremos o coeficiente de x^3, deveremos tomar x nove vezes e $-x^{-2}$ três vezes, ou seja, este coeficiente é $-\dbinom{12}{3} = -\dfrac{12!}{3!9!} = -\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = -220$.

(b) Para que não tenhamos x em um determinado termo, x deve ser tomado oito vezes, enquanto que $-x^{-2}$ deve ser tomando quatro vezes. Temos então que o termo independente é $\binom{12}{8} = \dfrac{12!}{8!4!} = 495$.

4. Na multiplicação dos três termos $(x+y+z)$, devemos tomar um x, um y e um z, de cada. Isso pode ser feito de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras diferentes, portanto o coeficiente de xyz é 6.

5. Para x^{12}, temos apenas uma possibilidade, que é tomar x^3 quatro vezes, portanto, seu coeficiente é 1.

6. (Extraído da Vídeo Aula) Para obtermos x^3, teremos dois casos: três vezes $(-3x)$ e sete vezes 1, e uma vez $(2x^2)$, uma vez $(-3x)$ e oito vezes 1. Assim o termo com x^3 pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{10!}{7!3!0!}1^7(-3x)^3(2x^2)^0 + \frac{10!}{8!1!1!}1^8(-3x)^1(2x^2)^1 &= \\ 120 \cdot 1(-27x^3)1 + 90 \cdot 1(-3x) \cdot 2x^2 &= \\ -3240x^3 - 540x^3 &= \\ -3780x^3. \end{aligned}$$

Temos então que o coeficiente de x^3 é -3780.

7. Temos seis possibilidades:

1	x	x^2	n^o de termos
5	0	5	$\frac{10!}{5!0!5!}$
4	2	4	$\frac{10!}{4!2!4!}$
3	4	3	$\frac{10!}{3!4!3!}$
2	6	2	$\frac{10!}{2!6!2!}$
1	8	1	$\frac{10!}{1!8!1!}$
0	10	0	$\frac{10!}{0!10!0!}$

Portanto, o coeficiente de x^{10} é $\dfrac{10!}{5!0!5!} + \dfrac{10!}{4!2!4!} + \dfrac{10!}{3!4!3!} + \dfrac{10!}{2!6!2!} + \dfrac{10!}{1!8!1!} + \dfrac{10!}{0!10!0!} = 252 + 525 + 4200 + 1260 + 90 + 1 = 6328$.

8. $\dfrac{7!}{2!3!2!} = 210$.

9. Existem duas possibilidades na multiplicação:

(a) tomar um 1, um x e um $\dfrac{2}{x}$. Temos então $\dfrac{3!}{1!1!1!} \cdot 1 \cdot x \cdot \dfrac{2}{x} = 6 \cdot 2 = 12$;

(b) tomar três 1's, correspondento a mais uma escolha, pois $\dfrac{3!}{3!0!0!} = 1$.

Portanto, o termo independente é $1 + 12 = 13$.

10. (Extraído de UESPI - 2012) Temos apenas uma possibilidade que seria tomando três x^2 e um $3x$, ou seja, o termo com x^7 é $\dfrac{4!}{3!1!0!} \cdot (x^2)^3 \cdot 3x = 4 \cdot x^6 \cdot 3x = 12x^7$. Temos então que seu coeficiente é 12. Resposta D.

11. (Extraído da Olimpíada Paulista de Matemática)

a) Para desenvolver $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2$, vamos analisar a quantidade de potências diferentes de x que teremos. Como a menor é 2 e a maior é 8, basta agora calcular suas quantidades. Para x^2, assim como para x^8, temos apenas um termo de cada. Para x^3, temos $x^1 \cdot x^2$ e $x^2 \cdot x^1$, ou seja, $2x^3$, e também $2x^7$, pensando de forma análoga. Para x^4, temos $x^1 \cdot x^3$, $x^2 \cdot x^2$ e $x^3 \cdot x^1$, ou seja, $3x^4$, e também $3x^6$. Por fim, para x^5, temos $x^1 \cdot x^4$, $x^2 \cdot x^3$, $x^3 \cdot x^2$ e $x^4 \cdot x^1$, ou seja, $4x^5$. Chegamos então que $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2$ é igual a $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8$.

b) Para soma 2, temos apenas uma possibilidade, $(1, 1)$, assim como para soma 8, $(4, 4)$; para soma 3, temos duas possibilidades, $(1, 2)$ e $(2, 1)$, assim como para soma 7, $(3, 4)$ e $(4, 3)$; para soma 4, temos três possibilidades, $(1, 3)$, $(2, 2)$ e $(3, 1)$, assim como para soma 6, $(2, 4)$, $(3, 3)$ e $(4, 2)$; por fim, para soma 5, temos quatro possibilidades, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ e $(4, 1)$. Comparando estes valores com os valores encontrados no desenvolvimento de $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2$, percebe-se que o número de maneiras de se obter n pontos é igual ao coeficiente de x^n.

c) Usando o mesmo raciocínio proposto no enunciado do problema, temos:

$$\begin{aligned}(x^1 + x^2 + x^2 + x^3)(x^1 + x^3 + x^3 + x^5) &= \\ (x^1 + 2x^2 + x^3)(x^1 + 2x^3 + x^5) &= \\ x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8 &= \\ (x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2.&\end{aligned}$$

Realmente o fabricante estava correto.

12. (Extraído da Olimpíada Paulista de Matemática)

a) Como são quatro possibilidades de pontuação para cada jogo e são 21 jogos, o número de maneiras diferentes de uma equipe pontuar é $4^{21} = 2^{42}$.
Outra maneira de resolver o problema é o associando à expressão $(x^0 + x^1 + x^3 + x^5)^{21}$, sendo o coeficiente de x^3, por exemplo, o número de maneiras diferentes que uma equipe tem de marcar exatamente 3 pontos no campeonato. Dessa forma, o total de maneiras diferentes é o somatório de todos os coeficientes da expressão dada, ou seja, $(1 + 1 + 1 + 1)^{21} = 4^{21} = 2^{42}$.

b) Vamos supor que uma determinada equipe tenha feito k pontos no campeonato, obtendo-os com a derrotas, b empates, c vitórias e d supervitórias, donde $0a + 1b + 3c + 5d = k$. Agora vamos formar uma palavra que tenha a letras A, b letras B, c letras C e d letras D, totalizando 21 letras. O número de maneiras de uma equipe fazer k pontos é igual ao número de anagramas que podemos fazer com a palavra formada, ou seja, uma permutação com repetição, que é $\dfrac{21!}{a!b!c!d!}$.
Agora vamos para o desenvolvimento de $(x^0 + x^1 + x^3 + x^5)^{21}$. O termo com x^k, sendo $0a + 1b + 3c + 5d = k$ é $\dfrac{21!}{a!b!c!d!}(x^0)^a(x^1)^b(x^3)^c(x^5)^d = \dfrac{21!}{a!b!c!d!}x^{0a+1b+3c+5d} = \dfrac{21!}{a!b!c!d!}x^k$, ou seja, o coeficiente de x^k também é $\dfrac{21!}{a!b!c!d!}$.

13. (Extraído do ITA) Vamos dividir o problema em três casos:

1	x	x^2	n^o de termos
7	0	2	$\dfrac{9!}{7!0!2!}$
6	2	1	$\dfrac{9!}{6!2!1!}$
5	4	0	$\dfrac{9!}{5!4!0!}$

Portanto, o coeficiente de x^4 é $\dfrac{9!}{7!0!2!} + \dfrac{9!}{6!2!1!} + \dfrac{9!}{5!4!0!} = 36 + 252 + 126 = 414$.

14. (Extraído do ITA) Tomando uma quantidade a de 1, b de x^5 e c de x^7, temos que encontrar a, b e c, tais que $0a + 5b + 7c = 17$ e $a + b + c = 20$. A única solução é $(a, b, c) = (17, 2, 1)$ e, consequentemente, o coeficiente de x^{17} é $\dfrac{20!}{17!2!1!} = 3420$. Resposta D.

15. Basta fazermos $a = b = c = 1$, obtendo $(1 + 1 + 1)^{100} = 3^{100}$.

16.

(a) O termo geral é dado por $\dfrac{5!}{i!j!k!}1^i \cdot (x)^j \cdot (x^2)^k$. Queremos que $j + 2k = 5$. Para isso ocorrer, j necessariamente é um número ímpar menor ou igual a 5 e isso nos fornece as seguintes possibilidades dos pares $(i, j) = (12)(31)$ e (50). Portanto $(ijk) = (212)(131)$ ou (050) e o coeficiente de x^5 será dado por $\dfrac{5!}{2!1!2!} + \dfrac{5!}{1!3!1!} + \dfrac{5!}{0!5!0!} = 51$.

(b) O termo geral é dado por $\dfrac{6!}{i!j!k!}1^i \cdot (x)^j \cdot (x^2)^k$. Queremos que $j + 2k = 5$. Para isso ocorrer, j necessariamente é um número ímpar menor ou igual a 5 e isso nos fornece as seguintes possibilidades dos pares $(i,j) = (12)(31)$ e (50). Portanto $(ijk) = (312)(231)$ ou (150) e o coeficiente de x^5 será dado por $\frac{6!}{3!1!2!} + \frac{6!}{2!3!1!} + \frac{6!}{1!5!0!} = 126$.

(c) O termo geral é dado por $\frac{11!}{i!j!k!}1^i \cdot (x)^j \cdot (x^2)^k$. Queremos que $j + 2k = 5$. Para isso ocorrer, j necessariamente é um número ímpar menor ou igual a 5 e isso nos fornece as seguintes possibilidades dos pares $(i,j) = (12)(31)$ e (50). Portanto $(ijk) = (812)(731)$ ou (650) e o coeficiente de x^5 será dado por $\frac{11!}{8!1!2!} + \frac{11!}{7!3!1!} + \frac{11!}{6!5!0!} = 2277$.

17.

(a) O coeficiente de x^2yz é dado por $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$.

(b) O coeficiente de $x^{11}yz$ é dado por $\frac{13!}{11!1!1!} = 156$.

(c) O coeficiente de $x^{18}yz$ é dado por $\frac{20!}{18!1!1!} = 380$.

18.

(a) O coeficiente de x^2y^2z é dado por $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$.

(b) O coeficiente de x^2y^7z é dado por $\frac{10!}{2!7!1!} = 360$.

(c) O coeficiente de $x^2y^{19}z$ é dado por $\frac{22!}{2!19!1!} = 4620$.

19.

(a) O coeficiente de $x^1y^2w^2$ é dado por $\frac{5!}{1!2!0!2!} = 30$.

(b) O coeficiente de $x^1y^{10}w^2$ é dado por $\frac{13!}{1!10!0!2!} = 858$.

(c) O coeficiente de $x^1y^{20}w^2$ é dado por $\frac{23!}{1!20!0!2!} = 5313$.

20.

(a) Substituindo xy e z por 1 obtemos como soma dos coeficientes o número $(2 \cdot 1 + 1 - 1)^2 = 4$.

(b) Substituindo xy e z por 1 obtemos como soma dos coeficientes o número $(2 \cdot 1 + 1 - 1)^6 = 64$.

(c) Substituindo xy e z por 1 obtemos como soma dos coeficientes o número $(3 \cdot 1 + 1 - 1)^6 = 729$.

21.

(a) Substituindo x,y por 1 e z por 0 obtemos como soma dos coeficientes o número $(2 \cdot 1 + 1 - 0)^2 = 9$.

(b) Substituindo x, y por 1 e z por 0 obtemos como soma dos coeficientes o número $(2 \cdot 1 + 1 - 0)^6 = 729$.

(c) Substituindo x, y por 1 e z por 0 obtemos como soma dos coeficientes o número $(3 \cdot 1 + 1 - 0)^6 = 4096$.

22. (Extraído do ITA 2013) O coeficiente de $1^2x^4y^4$ é dado por

$$\frac{10!}{2!4!4!} = 3150.$$

Resposta letra A.

23. (ITA 2005) Se 0 é raiz, $(c+1)^5 = 0$, ou seja, $c = -1$. Consequentemente o polinômio pode ser escrito como $p(x) = (ax^2 - 2bx)^5 = x^5(ax - 2b)^5$. Como -1 é raiz, $0 = p(-1) = (a + 2b)^5$, ou seja, $a = -2b$. Para calcularmos a soma dos coeficientes, basta fazermos $x = 1$ e obtermos $2^5 = p(1) = (a - 2b)^5 = -(4b)^5$. Assim, $b = -\frac{1}{2}$. Portanto, $a + b + c = 1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Resposta letra A.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com