Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02

Limites Laterais

Introdução ao Cálculo

Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02
Limites Laterais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$, para $x \leq 3$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x > 3$. Determine o valor de b para que f seja contínua em 3.

Exercício 2. Determine $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|5x-10|}{x-2}$.

Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$, para $x \leq 3$ e $f(x) = x + b$ para $x > 3$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 3 sejam iguais.

Exercício 4. Existe $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x+4}{|x+4|}$?

Exercício 5. Quanto é $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^3}{x-5}$?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{81x^2 - 972x + 2916}}{x-6}$, para $x \neq 6$. Determine o limite lateral pela direita quando x se aproxima de 6.

Exercício 7. Calcule $L = \lim\limits_{x\to 25^+} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$.

Exercício 8. Calcule

$$L = \lim_{x\to 6^+} \frac{\sqrt[3]{1000x^3 - 18000x^2 + 108000x - 216000}}{x-6}.$$

Exercício 9. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\sin x|}{2x}$.

Exercício 10. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1}$?.

Exercício 11. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{5/2} - 9x^{1/2}}{x^{1/2}}$.

Exercício 12. Calcule $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x-1}$.
Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não é maior que x. Por exemplo, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

Exercício 13. Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2 - 4}$.

Exercício 14. Seja $\operatorname{sgn} t = 1$ se $t > 0$, $\operatorname{sgn} t = -1$ se $t < 0$ e $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Essa é a chamada função "sinal". Calcule

$$\lim_{x\to 7-} \lfloor x \rfloor \operatorname{sgn}(x-7).$$

Exercício 15. Determine se existe $\lim\limits_{x\to 0} |x| \operatorname{sgn} x$.

Exercício 16. Calcule $\lim\limits_{x\to \pi/2+} \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Encontre $\lim\limits_{x\to 8-} \dfrac{x^{1/3} - \sqrt{\lfloor x-3 \rfloor}}{x-8}$.

Dica: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x-a} = \dfrac{1}{3} \cdot a^{-2/3}$.

Exercício 18. Existe $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$, onde log é o logaritmo natural?
Dica: considere que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\log x - \log a}{x-a} = \dfrac{1}{a}$.

Exercício 19. Calcule $\lim\limits_{x\to e+} \log(x\lfloor \frac{x}{e} \rfloor)$, onde log é o logaritmo natural.

Exercício 20. Determine se existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x^2 - 5x + 6|}{x-2}$.

Exercício 21. Determine $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{|x^3 + 2x^2 + x - 4|}{x^2 - 4x + 3}$.

Respostas e Soluções.

1. Para que f seja contínua em 3, precisamos que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3),$$

ou seja, $b + 9 = 11$. Daí $b = 2$.

2. Quando $x > 2$, temos $|5x - 10| = 5|x - 2| = 5(x - 2)$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{|5x-10|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{5\cdot(x-2)}{x-2} \\ &= 5.\end{aligned}$$

3. Como o limite lateral pela esquerda é $6 + 1 = 7$ e o limite lateral pela direita é $3 + b$, devemos ter $b = 7 - 3 = 4$.

4. Para $x > -4$, temos o limite de $\frac{x+4}{x+4}$, que é constante e igual a 1. Para $x < -4$, analogamente temos o limite -1. Como $1 \neq -1$, o limite não existe.

5. Quando $x \to 5$, o numerador tende a 125 e o denominador tende a 0. Como $x > 5$, o denominador é sempre positivo, logo temos um número positivo próximo de 125 dividido por um número positivo muito pequeno. Obtemos o limite $+\infty$.

6. Temos a fatoração $81x^2 - 972x + 2916 = 81(x-6)^2$. Para $x > 6$, obtemos $f(x) = 9 \cdot \dfrac{|x-6|}{x-6} = 9$. Portanto, o limite lateral pela direita é 9.

7. O numerador se fatora como $(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)$. Logo, temos $L = \lim\limits_{x\to 25^+} (\sqrt{x}+5) = 10$.

8. O radicando é $1000(x-6)^3$, logo

$$L = \lim_{x\to 6^+} \left(10 \cdot \frac{(x-6)}{x-6}\right) = 10.$$

9. Para $x < 0$ próximo de 0, temos $\sin x < 0$ (pois $\sin(-t) = -\sin t$). Obtemos o limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{2x} &= -\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{2x} \\ &= -1/2.\end{aligned}$$

10. O numerador é uma constante positiva e o denominador tende a 0, sendo positivo, logo a resposta é $+\infty$.

11. Isso é

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}(x^2-9)}{x^{1/2}} &= \lim_{x\to 0+} x^2 - 9 \\ &= -9\end{aligned}$$

12. O piso acima é igual a 3 para x maior que 3 e suficientemente próximo de 3, enquanto $x - 1 \to 2$. Logo a resposta é $3/2$.

13. O numerador é $x - 1$ e tende a 1 quando $x \to 2$, enquanto o denominador tende a 0 pela esquerda. Logo a resposta é $-\infty$.

14. Temos $x \to 7$ com $x < 7$, logo $\lfloor x \rfloor = 6$. Além disso, $x - 7 < 0$, de modo que $\operatorname{sgn}(x-7) = -1$. Logo temos o limite da função constante -6, que é igual a -6.

15. Se $x < 0$, temos $|x| = -x$ e $\operatorname{sgn} x = -1$, logo o produto é x. Analogamente, se $x > 0$, o produto é x. Então temos $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

16. Temos $\cos x < 0$ para $x \in [\pi/2, \pi]$. Em particular, $\cos x < 0$ para $x > \pi/2$ próximo de $\pi/2$. Logo o numerador é igual a $-\cos x$ e o quociente é constante e igual a -1. Então o limite é -1.

17. Para $x < 8$ próximo de 8, temos $x - 3 < 5$ e próximo de 5, logo o piso acima é igual a 4. Logo o limite é

$$\lim_{x\to 8-} \frac{x^{1/3}-2}{x-8},$$

que é a derivada da função raiz cúbica, i.e. $\frac{1}{3}x^{-2/3} = 1/12$.

18. Sabemos que a derivada de log no ponto 1 existe e é igual a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x)}{x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x)}{x}\sqrt{x} \\ &= (\log' 1)\cdot \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \\ &= (\log' 1)\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

19. Temos $\lfloor \frac{x}{e} \rfloor = 1$ para $x > e$ próximo de e, logo trata-se de $\lim\limits_{x\to e} \log x = \log e = 1$.

20. Temos

$$|x^2 - 5x + 6| = |(x-2)(x-3)| = |x-2|\cdot|x-3|.$$

Estamos interessados em x próximo de 2, de modo que $x - 3 < 0$, logo $|x - 3| = 3 - x$. Portanto o nosso limite é

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|\cdot(3-x)}{x-2} &= \lim_{x\to 2}(3-x)\cdot \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}.\end{aligned}$$

Se adotamos a restrição $x > 2$, obtemos $\frac{x-2}{x-2} \to 1$. Analogamente, se $x < 2$, obtemos -1. Portanto os limites laterais são diferentes $(1 \neq -1)$ e o limite pedido não existe.

21. O numerador se fatora como

$$|x-1| \cdot |x^2+3x+4|.$$

Para $x > 1$, isso é $(x-1)(x^2+3x+4)$. O denominador é $(x-1)(x-3)$. Ficamos com

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+3x+4}{x-3} &= \frac{8}{-2} \\ &= -4\end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com