Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Números Irracionais e Reais

Oitavo Ano

Números Irracionais e Reais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *No quadro abaixo, determine quais números são irracionais.*

23	$5,345$	$\sqrt{2}$
$2,313131\ldots$	$\frac{1}{3}$	$0,01001000100001\ldots$

Exercício 2. *Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$.

e) $\dfrac{35}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

Exercício 3. *Represente em uma reta orientada os seguintes números:*

$$3,5 \quad -\frac{9}{4} \quad 0 \quad \frac{14}{7} \quad 5,\overline{2} \quad -\frac{30}{7}$$

Exercício 4. *Utilizando a calculadora podemos obter que*

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots$$

Agora, também utilizando uma calculadora, calcule os valores abaixo, faça os registro e observe como o resultado se aproxima cada vez mais do número 2.

a) $1,4^2 =$

b) $1,41^2 =$

c) $1,414^2 =$

d) $1,4142^2 =$

Exercício 5. *Com base no exercício anterior, utilizando a calculadora, calcule $\sqrt{3}$. Faça o mesmo procedimento do item anterior, ou seja, calcule o o quadrado do número encontrado apenas com uma casa decimal, depois com duas casas, depois com três e finalmente com quatro casas. Registre os resultados e observe como eles se aproximam cada vez mais de $\sqrt{3}$.*

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. *Compare as raízes abaixo preenchendo os espaços pontilhadas com os símbolos $>$ ou $<$.*

a) $\sqrt{2} \ldots\ldots \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{81} \ldots\ldots \sqrt{121}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} \ldots\ldots \sqrt{\frac{16}{25}}$.

d) $\sqrt{0,64} \ldots\ldots \sqrt{0,1}$.

e) $\sqrt{n} \ldots\ldots \sqrt{n+1}$ *com n número real não negativo.*

Exercício 7. *Sem utilizar a calculadora, estime, com uma casa decimal, a melhor aproximação para $\sqrt{11}$?*

Exercício 8. *Sem utilizar a calculadora, estime, com duas casas decimais, uma boa aproximação para $\sqrt{11}$.*

Exercício 9. *Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{80}$?*

Exercício 10. *Quantos números inteiros positivos existem entre $\sqrt{37}$ e $\sqrt{1226}$?*

Exercício 11. *Quantos dos números abaixo são maiores que 10?*
$3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$.
(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 3 *(d)* 4 *(e)* 5.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. *Explique porque entre dois números racionais sempre podemos encontrar um terceiro número racional.*

Exercício 13. *Dados dois reais positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.*

Exercício 14. *O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está situado entre $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n+2}$, onde n é inteiro positivo. Determine n.*

Exercício 15. *Prove que não é possível escrever $\sqrt{2}$ como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Exercício 16. *Prove que não é possível escrever:*

i $\sqrt{3}$ *como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que* $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

ii $\sqrt{5}$ *como uma fração de inteiros. Ou seja, prove que* $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

iii $\sqrt{p}$ *como uma fração de inteiros, sendo p um número primo. Ou seja, prove que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.*

Exercício 17. *É verdade que existem números irracionais A e B tais que A^B é racional?*

Exercício 18. *A sequência F_n de Farey é uma sequência de conjuntos formados pelas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ com $0 \le a \le b \le n$ arranjados em ordem crescente. Exibimos abaixo os quatro primeiros termos da sequência de Farey.*

$$\begin{aligned} F_1 &= \{0/1, 1/1\} \\ F_2 &= \{0/1, 1/2, 1/1\} \\ F_3 &= \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\} \\ F_4 &= \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\} \end{aligned}$$

Qual deve ser o conjunto F_5?

Exercício 19. *É possível mostrar que se duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são vizinhas na sequência de Farey F_n (veja o exercício anterior) então $ad - bc = \pm 1$. Sabendo disso, você consegue determinar que fração $\frac{a}{b}$ está imediatamente à esquerda de $\frac{5}{7}$ em F_7 sem calcular todos os seus elementos?*

Exercício 20. *Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande.*

a) *Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de 5 e o outro com capacidade de 7 litros.*

b) *Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de $2 - \sqrt{2}$ e o outro com capacidade de $\sqrt{2}$ litros.*

Exercício 21. *Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações*

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. *Números irracionais são aqueles que possuem representação decimal infinita e não periódica. Sendo assim,* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ *e* $0,01001000100001\ldots \in \mathbb{Q}'$ *pois possuem representações decimais não periódicas; ao passo que* $23 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$*,* $5,345 \in \mathbb{Q}$*,* $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$*,* $2,313131... \in \mathbb{Q}$ *possuem representações decimais periódicas.*
Comentário para professores: *Pode ser difícil convencer o aluno em um primeiro contato com os números irracionais que* $\sqrt{2}$ *é irracional e consequentemente nos primeiros exercícios o aluno deverá assumir tal fato. Deixamos a demonstração desta afirmação para o final deste bloco de exercícios e sugerimos que o professor faça o mesmo até seus alunos terem mais familiaridade com as distinções entre os conjuntos numéricos.*

2. *Já sabemos que valem as inclusões* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*. Assim:*

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$*. Verdadeira!*

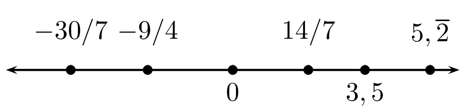
b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$*. Verdadeira!*

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$*.Falsa, pois* $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ *é o conjunto das frações não inteiras.*

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$*. Verdadeira!*

e) $\dfrac{35}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$*. Falsa, pois* $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ *é o conjunto das frações não inteiras e* $\frac{35}{5} = 7$*.*

3. *Uma representação seria:*



4. *Resposta com o uso da calculadora.*

a) $1,4^2 = 1,96$.

b) $1,41^2 = 1,9881$.

c) $1,414^2 = 1,999396$.

d) $1,4142^2 = 1,99996164$.

5. *Resposta com o uso da calculadora.*

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059\ldots$$

a) $1,7^2 = 2,89$.

b) $1,73^2 = 2,9929$.

c) $1,732^2 = 2,999824$.

d) $1,7320^2 = 2,999824$.

2 Exercícios de Fixação

6.

a) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

b) $\sqrt{81} < \sqrt{121}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} < \sqrt{\frac{16}{25}}$.

d) $\sqrt{0,64} > \sqrt{0,1}$.

e) $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ *com* n.

7. *Observe que* $\sqrt{9} = 3 < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$.
Agora tentemos descobrir a primeira casa decimal após a vírgula:

i $3,1^2 = 9,61$.

ii $3,2^2 = 10,24$.

iii $3,3^2 = 10,89$.

iv $3,4^2 = 11,56$.

Logo, para apenas a descobrirmos a primeira casa decimal, basta observarmos que:

$$\begin{gathered} 3,3^2 < 11 < 3,4^2 \\ 10,89 < 11 < 11,56, \end{gathered}$$

Então a melhor aproximação com uma casa decimal será o $3,3$.

8. *Observe que* $\sqrt{11}$ *com uma casa decimal foi aproximado para* $3,3$*. Agora para a casa do centésimo, basta considerarmos os quadradados:*

$$(3,30)^2, (3,31)^2, (3,32)^2, \ldots, (3,39)^2, (3,40)^2.$$

Repetindo o procedimento do exercício anterior, a melhor aproximação será $3,31$.

9. *Como* $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ *e* $\sqrt{64} = 8 < \sqrt{80} < \sqrt{81} = 9$*. O primeiro inteiro positivo maior que* $\sqrt{8}$ *é* 3 *e o último inteiro menor que* $\sqrt{80}$ *é* 8*. Sendo assim, teremos* 6 *inteiros positivos, a saber* $\{3,4,5,6,7,8\}$.

10. *Temos:*

$$\begin{aligned} 6 &= \sqrt{36} \\ &< \sqrt{37} \\ &< \sqrt{49} \\ &= 7; \\ 35 &= \sqrt{1225} \\ &< \sqrt{1226} \\ &< \sqrt{1296} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que o primeiro inteiro positivo maior que $\sqrt{37}$ é 7 e o último inteiro positivo menor que $\sqrt{1226}$ é o 35. Logo, teremos: $35 - 7 + 1 = 29$ inteiros positivos compreendidos entre os números do problema, a saber: $\{7, 8, 9, \ldots, 34, 35\}$.

11. *Os quadrados dos números são respectivamente: 99, 112, 125, 108 e 98. Destes, apenas o primeiro e o último são menores que o quadrado de 10 que é 100. Assim, os três números do meio são maiores que 10. Resposta C.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

12. *Dados dois racionais a e b, somando a aos dois lados da desigualdade, temos:*

$$\begin{array}{rcl} a & < & b \\ a+a & < & b+a \\ 2a & < & a+b \\ a & < & \dfrac{a+b}{2} \end{array}$$

Repetindo o procedimento, agora com b, temos:

$$\begin{array}{rcl} a & < & b \\ a+b & < & b+b \\ a+b & < & 2b \\ \dfrac{a+b}{2} & < & b \end{array}$$

O que resulta em: $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ Como $\dfrac{a+b}{2}$ também é um racional, isso mostra que existe um racional entre a e b.

Comentário para professores: *É bom enfatizar que se a construção acima for reiterada com os racionais a e $\dfrac{a+b}{2}$ (ou com $\dfrac{a+b}{2}$ e b) o aluno poderá mostrar que existe uma infinidade de racionais entre a e b. Outros comentários comentários que poderiam instigar os alunos sobre a distribuição dos racionais e dos irracionais na reta seria questioná-los se qualquer intervalo contém números racionais e irracionais.*

13. *(Extraído da UNICAMP) Uma boa estratégia seria eliminar os radicais elevando ambos números a uma potência múltipla de 3 e 4. Veja que:*

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt[3]{3})^{12} & = & 3^4 \\ & = & 81 \\ & > & 64 \\ & = & 4^3 \\ & = & (\sqrt[4]{4})^{12} \end{array}$$

Portanto, como $(\sqrt[3]{3})^{12} > (\sqrt[4]{4})^{12}$, segue que $\sqrt[3]{3}$ é o maior.

14. *(Extraído do Colégio Naval) Façamos uma primeira estimativa:*

$$\begin{array}{c} 1 < 4 < 8 \\ 1^3 < 4 < 2^3 \\ \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} \\ 1 < \sqrt[3]{4} < 2 \end{array}$$

Segunda estimativa:

$$\begin{array}{c} 8 < 16 < 27 \\ 2^3 < 16 < 3^3 \\ \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27} \\ 2 < \sqrt[3]{16} < 3 \end{array}$$

Finalmente, somando as duas últimas desigulddades obtidas, temos:

$$\begin{array}{c} 3 < \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 5 \\ 4 < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < 6 \\ \sqrt{4} < 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} < \sqrt{6} \\ \sqrt{4} < \sqrt{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} < \sqrt{6} \end{array}$$

Portanto, $n = 4$.

15. *Vamos supor que é possível termos uma fração irredutível $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Neste caso, podemos escrever:*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2} & = & \dfrac{m}{n} \\ (\sqrt{2})^2 & = & \left(\dfrac{m}{n}\right)^2 \\ 2 & = & \dfrac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 & = & m^2 \end{array}$$

Agora temos a seguinte situação, o membro da esquerda é par, portanto o da direita também o será. Contudo, não podemos ter m^2 par, se m também não for par. Sendo assim, $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\begin{array}{rcl} m & = & 2k \\ m^2 & = & 4k^2 \end{array}$$

Agora, voltando à equação $2n^2 = m^2$ e substituindo o m^2 pelo $4k^2$, e ficamos com:

$$\begin{array}{rcl} 2n^2 & = & m^2 \\ 2n^2 & = & 4k^2 \\ n^2 & = & 2m^2. \end{array}$$

Pelo argumento anterior, n é par, isso contradiz nossa suposição inicial pois tínhamos assumido que a fração $\frac{m}{n}$ era *irredutível. Essa contradição mostra que a suposição inicial é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional.*

Comentário para professores: *Este é um exemplo clássico de prova por absurdo. Quando mencionado em sala de aula, sugerimos que o professor comente exemplos cotidianos de afirmações que conduzem a absurdos para que os alunos se sintam mais confortáveis com tal demonstração.*

16. *Utilize o mesmo argumento da questão anterior.*

17. *Tome $A = B = \sqrt{2}$. Se o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, o enunciado está satisfeito. Caso contrário, faça $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $B = \sqrt{2}$. Assim, $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ servirá como exemplo.*

Comentário para professores: *Já existe uma demonstração de que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é de fato irracional. Um exemplo mais construtivo usando fatos que não são estudados no oitavo ano seria escolher $A = \sqrt{10}$ e $B = \log_{10} 4$. Daí, $A^B = 2$ é um racional.*

18.

$$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}.$$

19. *Usando a propriedade dada no enunciado, temos $7a - 5b = \pm 1$. Veja que $7a$ deve deixar resto 1 ou 6 na divisão por 5. Dentre os valores possíveis de a no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, apenas 2 e 3 satisfazem tal condição. Se $a = 2$, temos $b = 3$. Se $a = 3$, teremos $b = 4$. Entretanto, como $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{3}{4}$, a fração procurada é $\dfrac{2}{3}$.*

20. *a) Basta usar três vezes o balde de 5 litros e, em seguida, retirar duas vezes líquido do tambor usando o balde de 7 litros. Dessa forma, transportamos $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ litro.*

b) A quantidade a que podemos transportar de um tambor para o outro é da forma $k(2 - \sqrt{2}) + l(\sqrt{2})$ litros onde k e l são inteiros indicando quantas vezes tiramos ou colocamos líquidos usando cada um dos baldes. Se $l - k \neq 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ a - 2k &= \sqrt{2}(l-k) \\ \frac{a-2k}{l-k} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o número $\sqrt{2}$ seria o quociente de dois inteiros o que resultaria em um número racional. Sabemos que isso não pode acontecer porque $\sqrt{2}$ é irracional. Falta analisarmos o que acontece quando $l = k$. A equação se transforma em:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2} \\ &= k(2-\sqrt{2}) + k\sqrt{2} \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Veja que $2k$ é par e assim não podemos levar um valor ímpar como $a = 1$. Em qualquer caso, não é possível colocar exatamente 1 litro usando os baldes com as capacidades dadas neste item.

21. *(Extraído da prova da Cone Sul publicada na Revista Eureka número 5) A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b - a$ têm um fator comum, e reciprocamente). O problema se transforma em achar o menor valor de n tal que as frações sejam todas irredutíveis. Observe que as frações anteriores possuem a forma $\dfrac{a}{n+a+2}$ e pelo critério anterior bastaria que $\dfrac{a}{n+2}$ fosse irredutível. Tendo isso em mente, se $n+2$ é um primo maior que 91, todas as frações serão irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95 pois $n+2 = 97$ é um número primo. Verifiquemos que é o menor possível.*

1. *Se $n+2 < 97$ e $n+2$ é par, então n é par e há frações redutíveis como, por exemplo, $\frac{20}{n+2}$.*
2. *Se $19 \leq n+2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.*
3. *Se $n+2 < 19$, então $n+2$ tem um múltiplo entre 19 e 91 e, portanto, há uma fração redutível.*
4. *Se $n+2 = 93 = 3 \cdot 31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.*
5. *Se $n+2 = 95 = 5 \cdot 19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.*

Logo, o valor mínimo de $n+2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com