Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau

Inequações Quociente do Segundo Grau

1° **ano E.M.**

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Inequações Produto e Quociente do Segundo Grau
Inequações Quociente do Segundo Grau

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações

a) $\frac{x^2-x}{-x^2+5x/2-1} \geq 0$

b) $\frac{-2x^2+x+3}{x^2+3x} > 0$

c) $\frac{x^2-3x+2}{-x^2+1} < -2$

d) $\frac{x^2-x/2}{-x^2-x/3} \geq -1$

e) $\frac{2x+2}{x^2-6x+9} > 0$

f) $\frac{-x^2+1}{x^2-x} < 0$

g) $\frac{-3x^2+3x/2}{x^2+x/2} \leq 0$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações

a) $\frac{2x-1}{x-5} \geq \frac{x+1}{x+5}$

b) $\frac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$

d) $\frac{-1}{x^2+2x} \leq 2$

e) $\frac{-2x^2+3x+2}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} + 2$

f) $\frac{-2x^2}{-x^2-4} > \frac{1}{2}$

g) $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-2} < 2.$

Exercício 3. Para quais valores reais de x a função $f(x) = x + 1/x$ é no máximo igual a -1?

Exercício 4. Seja $f(x) = 1/x^2$. Para quais valores reais de x temos $f(x) < f(1+x)$?

Exercício 5. Seja n inteiro maior que 1. Para quais valores reais de x vale a inequação

$$\frac{-x^2 + x(2n+1) - 2n}{-x^2 + x(2n-1)} < 1?$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 6. Determine o maior valor de b tal que

$$\frac{x^2+8x+b}{x^2+2x+3} \leq 4$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 7. Se

$$\frac{x-a}{x^2+1} < \frac{x+a}{x^2}$$

para todo $x \neq 0$, qual condição a satisfaz?

Exercício 8. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que se tenha

$$\frac{x^2-mx+2}{-x^2+x-1} > m$$

para todo x real.

Exercício 9. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que se tenha

$$\frac{x}{x^2+4} > \frac{x+m}{x^2+1}$$

para todo x real.

Exercício 10. Qual o maior domínio de definição possível para a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x+3}}?$$

Exercício 11. (ITA) Considere as funções f e g definidas por $f(x) = x - 2/x$, para $x \neq 0$, e $g(x) = x/(x+1)$, para $x \neq -1$. O conjunto de todas as soluções da inequação $(g \circ f)(x) < g(x)$ é:

(a) $[1, +\infty[$

(b) $]-\infty, -2[$

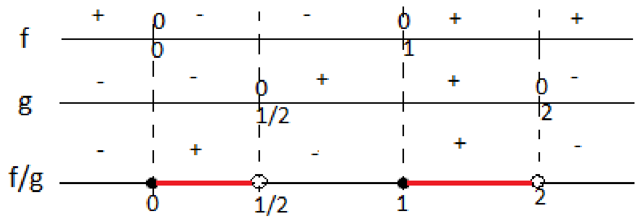
(c) $[-2, -1[$

(d) $]-1, 1[$

(e) $]-2, -1[\cup]1, +\infty[$

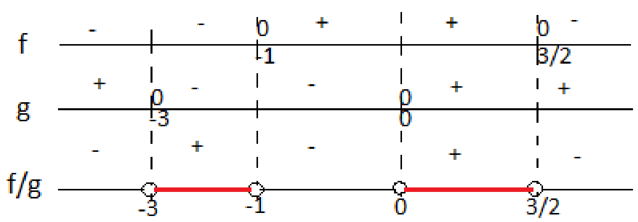
Respostas e Soluções.

1. a) Considere $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = -x^2 + 5x/2 - 1$. A função g tem raízes $x = 1/2$ e $x = 2$. Logo, nesses dois valores a fração não está definida. Analisando os sinais dos fatores



Assim, o conjunto solução é $S = [0, 1/2[\cup [1, 2[$. Note que $x = 1/2$ e $x = 2$ não pertencem ao conjunto solução.

b) Considere $f(x) = -2x^2 + x + 3$ e $g(x) = x^2 + 3x$. A função g tem raízes $x = -3$ e $x = 0$. Logo, nesses dois valores a fração não está definida. Analisando os sinais dos fatores

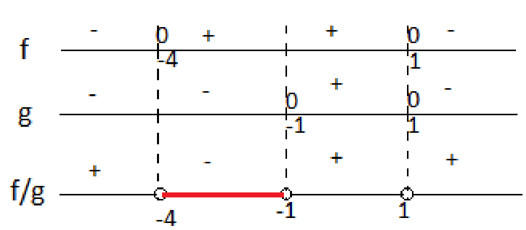


Assim, o conjunto solução é $S =]-3, -1[\cup]0, 3/2[$. Note que $x = -3$ e $x = 0$ não pertencem ao conjunto solução.

c)

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 1} < -2 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 1} + 2 < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 3x + 2 + 2(-x^2 + 1)}{-x^2 + 1} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-x^2 - 3x + 4}{-x^2 + 1} < 0. \end{aligned}$$

Considere $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ e $g(x) = -x^2 + 1$. A função g tem raízes $x = -1$ e $x = 1$. Logo, nesses dois valores a fração não está definida. Analisando os sinais dos fatores



Assim, o conjunto solução é $S =]-4, -1[$. Note que $x = -1$ e $x = 1$ não pertencem ao conjunto solução.

d)

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - x/2}{-x^2 - x/3} \geq -1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - x/2}{-x^2 - x/3} + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - x/2 + (-x^2 - x/3)}{-x^2 - x/3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-5x/6}{-x^2 - x/3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-5x/6}{-x(x + 1/3)} \geq 0. \end{aligned}$$

A fração não está definida para os valores $x = -1/3$ e $x = 0$. Note que temos o fator x no numerador e denominador da fração. Para $x \neq 0$, podemos multiplicar a fração por $1 = (-1/x)/(-1/x)$, obtendo

$$\frac{5/6}{x + 1/3} \geq 0,$$

o que nos dá $x > -1/3$. Logo o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x > -1/3 \quad e \quad x \neq 0\}$. Note que $x = -1/3$ e $x = 0$ não pertencem ao conjunto solução.

e) Seja $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = x^2 - 6x + 9$. Note que a função g é um quadrado perfeito, a saber, $g(x) = (x - 3)^2$. Assim, $g \geq 0$ para todo x real. Como g está no denominador, devemos ter $g \neq 0$, logo $x \neq 3$. Assim, basta analisar o sinal de f, a qual é positiva para $x > -1$. Segue que $S = \{x \in \mathbb{R}; x > -1 \quad e \quad x \neq 3\}$.

f)

$$\frac{-x^2 + 1}{x^2 - x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} < 0$$

Devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq 1$ para boa definição da fração na inequação. Para $x \neq 1$, $(x - 1 \neq 0)$ e podemos multiplicar a fração por $1 = [1/(x - 1)]/[1/(x - 1)]$, obtendo

$$\frac{-(x + 1)}{x} < 0.$$

Resolvendo agora a inequação quociente de primeiro grau equivalente temos $S = \{x \in \mathbb{R}; x < -1 \quad ou \quad x > 0 \quad e \quad x \neq 1\}$. Note que $x = 0$ e $x = 1$ não pertencem ao conjunto solução.

g)

$$\frac{-3x^2 + 3x/2}{x^2 + x/2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x(x - 1/2)}{x(x + 1/2)} \leq 0$$

Devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq -1/2$ para boa definição da fração na inequação. Para $x \neq 0$ podemos multiplicar a fração por $1 = x/x$, obtendo

$$\frac{-3(x - 1/2)}{x + 1/2} \leq 0.$$

Resolvendo agora a inequação quociente de primeiro grau equivalente temos $S = \{x \in \mathbb{R}; x < -1/2 \quad ou \quad x > 1/2\}$. Note que $x = -1/2$ e $x = 0$ não pertencem ao conjunto solução.

2. a) Temos $x \neq -5$ e $x \neq 5$ para as frações estarem bem definidas.

$$\begin{aligned}
&\frac{2x-1}{x-5} \geq \frac{x+1}{x+5}\\
\Leftrightarrow &\frac{2x-1}{x-5} - \frac{x+1}{x+5} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{(2x-1)(x+5)-(x+1)(x-5)}{(x-5)(x+5)} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2+13x}{x^2-25} \geq 0.
\end{aligned}$$

Analisando os sinais dos fatores, temos o conjunto solução $S =]-\infty, 13] \cup]-5, 0] \cup]5, +\infty[$. Note que -5 e 5 estão fora do conjunto solução.

b) Temos $x \neq -1$ e $x \neq 1$ para as frações estarem bem definidas.

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{x+1}\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} \geq \frac{1}{x+1}\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2+2x-1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2+x}{(x+1)(x-1)} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x}{x-1} \geq 0,
\end{aligned}$$

onde, na última equivalência, o numerador e o denominador foram divididos por $x+1$, já que $x \neq -1$. Analisando os fatores na última inequação, temos $S =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$. Note que -1 e 1 estão fora do conjunto solução.

c) Temos $x \neq -1$ e $x \neq 1$ para as frações estarem bem definidas.

$$\begin{aligned}
&\frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{2x(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2-3x}{x^2-1} \geq 0.
\end{aligned}$$

Analisando os fatores na última inequação, temos $S =]-\infty, -1[\cup [0, 1[\cup [3, +\infty[$. Note que -1 e 1 estão fora do conjunto solução.

d) Temos $x \neq 0$ e $x \neq -2$ para as frações estarem bem definidas.

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{x^2+2x} \leq 2\\
\Leftrightarrow &\frac{-1}{x^2+2x} - 2 \leq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{-1-2(x^2+2x)}{x^2+2x} \leq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{-2x^2-4x-1}{x^2+2x} \leq 0.
\end{aligned}$$

Analisando os fatores na última inequação, temos $S =]-\infty, -2[\cup [-1-\sqrt{2}/2, -1+\sqrt{2}/2] \cup]0, +\infty[$. Note que 0 e -2 estão fora do conjunto solução.

e) Como $x^2+1 > 0$ para todo x real, podemos multiplicar toda a inequação por esse termo, obtendo

$$\begin{aligned}
&\frac{-2x^2+3x+2}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} + 2\\
\Leftrightarrow &-2x^2+3x+2 \leq 1+2(x^2+1)\\
\Leftrightarrow &-4x^2+3x-1 \leq 0.
\end{aligned}$$

A função $f(x) = -4x^2+3x-1$ é negativa para todo x real. Assim, o conjunto solução é $S = \mathbb{R}$.

f) Como $-x^2-4 < 0$ para todo x real, multiplicamos toda a inequação por esse fator. Note a inversão do sinal de desigualdade.

$$\begin{aligned}
&\frac{-2x^2}{-x^2-4} > \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow &-2x^2 < \frac{1}{2}(-x^2-4)\\
\Leftrightarrow &\frac{-3}{2}x^2 + 2 < 0\\
\Leftrightarrow &x^2 > 4/3.
\end{aligned}$$

Assim, $S =]-\infty, \frac{-2\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty[$.

g) Temos $x \neq 1$ e $x \neq 2$ para as frações estarem bem definidas.

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-2} - 2 < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x(x-2)-(x-1)-2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{-x^2+3x-3}{(x-1)(x-2)} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{-x^2+3x-3}{x^2-3x+2} < 0.
\end{aligned}$$

Analisando os sinais dos fatores, temos o conjunto solução $S =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$. Note que 1 e 2 estão fora do conjunto solução.

3.

$$
\begin{aligned}
&x+\frac{1}{x} \leq -1\\
\Leftrightarrow &x+\frac{1}{x}+1 \leq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2+1+x}{x} \leq 0.
\end{aligned}
$$

A função $f(x) = x^2+x+1$ é positiva para todo x real, logo devemos ter $x<0$. Segue que $f \leq -1$ para $x<0$.

4.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2} < \frac{1}{(x+1)^2}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{(x+1)^2-x^2}{x^2(x+1)^2} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} < 0.
\end{aligned}
$$

A função $f(x)$ está definida para $x \neq 0$, enquanto $f(x+1)$ para $x \neq -1$. Da última inequação temos $2x+1<0$, já que $x^2(x+1)^2>0$ para todo $x \neq 0, -1$. Assim, $x < -1/2$.

5.

$$
\begin{aligned}
&\frac{-x^2+x(2n+1)-2n}{-x^2+x(2n-1)} < 1\\
\Leftrightarrow &\frac{-x^2+x(2n+1)-2n}{-x^2+x(2n-1)} - 1 < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{-x^2+x(2n+1)-2n-(-x^2+x(2n-1))}{-x^2+x(2n-1)} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{2x-2n}{-x^2+x(2n-1)} < 0.
\end{aligned}
$$

Considere $f(x) = 2x-2n = 2(x-n)$ e $g(x) = -x^2+x(2n-1) = x(2n-1-x)$. f tem raiz em $x=n$ e g tem raízes $x=0$ e $x=2n-1$. Como $n>1$, $2n-1>n$. Analisando os sinais dos fatores na última inequação temos $0<x<n$ ou $x>2n-1$.

6. Analisando o sinal de x^2+2x+3, temos que esse fator é positivo para todo x real. Então, multiplicando toda a inequação por esse fator,

$$
\begin{aligned}
&x^2+8x+b \leq 4(x^2+2x+3)\\
\Leftrightarrow &-3x^2+b-12 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Definindo $f(x) = -3x^2+b-12$, temos $a=-3<0$. Então $f \leq 0$ para todo x se $\Delta = -4(-3)(b-12) \leq 0 \Leftrightarrow b \leq 12$. O maior valor de b tal que a inequação é válida é $b=12$.

7. Temos $x \neq 0$ para a fração da direita estar bem definida.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x-a}{x^2+1} < \frac{x+a}{x^2}\\
\Leftrightarrow &\frac{x-a}{x^2+1} - \frac{x+a}{x^2} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{(x-a)x^2-(x+a)(x^2+1)}{(x^2+1)x^2} < 0\\
\Leftrightarrow &\frac{2ax^2+x+a}{(x^2+1)x^2} > 0.
\end{aligned}
$$

Como o termo no denominador é sempre positivo (para $x \neq 0$), basta termos o termo no numerador positivo. Denotando $f(x) = 2ax^2+x+a$, devemos ter

- O coeficiente angular $2a>0 \Leftrightarrow a>0$;
- $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1-8a^2<0 \Leftrightarrow a < \frac{-\sqrt{2}}{4}$ *ou* $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Como as duas condições devem valer simultaneamente, $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$.

8. A função $f(x) = -x^2+x-1$ é menor que zero para todo x real, então multiplicando os dois lados da inequação por essa função,

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2-mx+2}{-x^2+x-1} > m\\
\Leftrightarrow &x^2-mx+2 < m(-x^2+x-1)\\
\Leftrightarrow &x^2(1+m)-2mx+2+m < 0.
\end{aligned}
$$

Para essa última inequação valer para todo x real,

- O coeficiente angular $1+m<0 \Leftrightarrow m<-1$;
- $\Delta = 4m^2-4(1+m)(2+m) < 0 \Leftrightarrow m > -2/3$.

Como as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente, não existe $m \in \mathbb{R}$ que satisfaça a inequação.

9.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{x^2+4} > \frac{x+m}{x^2+1}\\
\Leftrightarrow &\frac{x}{x^2+4} - \frac{x+m}{x^2+1} > 0\\
\Leftrightarrow &\frac{x(x^2+1)-(x^2+4)(x+m)}{(x^2+1)(x^2+4)} > 0\\
\Leftrightarrow &\frac{mx^2+3x+4m}{(x^2+1)(x^2+4)} < 0
\end{aligned}
$$

Como o denominador é sempre positivo, basta que $mx^2+3x+4m<0$ para todo x real. O que ocorre se

- O coeficiente angular $m<0$;
- $\Delta = 9-16m^2 < 0 \Leftrightarrow m < -3/4$ *ou* $m > 3/4$.

Como as duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente, devemos ter $m < -3/4$.

10. Seja $f(x) = x^2+2x-8$ e $g(x) = x^2+4x+3$. A fração dentro da raiz deve ser não negativa, então $f/g \geq 0$. Além disso, devemos ter $g \neq 0$, porque a divisão por zero não está definida. Analisando os sinais dos fatores temos que a função está definida em $]-\infty,-4] \cup]-3,-1[\cup [2,+\infty[$.

11. Observe que como g não está definida para $x=-1$, devemos ter $f \neq -1$ para que $g \circ f$ esteja definida. Isto nos dá $x \neq -2$ e $x \neq 1$. $g \circ f$ não está definida para $x=0$, já que f não está. Assim, devemos ter $x \neq -2, -1, 0, 1$. Desenvolvendo $(g \circ f)(x) < g(x)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{x - 2/x}{x - 2/x + 1} < \frac{x}{x+1} \\
\Leftrightarrow &\frac{x^2 - 2}{x^2 - 2 + x} < \frac{x}{x+1} \\
\Leftrightarrow &\frac{x^2 - 2}{x^2 - 2 + x} - \frac{x}{x+1} < 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{(x^2-2)(x+1) - x(x^2+x-2)}{(x^2+x-2)(x+1)} < 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{-2}{(x+2)(x-1)(x+1)} < 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{-2}{(x^2-1)(x+2)} < 0,
\end{aligned}$$

onde, na primeira equivalência, multiplicamos a fração à esquerda por $x/x = 1$, já que $x \neq 0$. Da última inequação, devemos ter $(x^2-1)(x+2) > 0$, o que nos dá $x \in]-2, -1[\cup]1, +\infty[$. Letra (e).

Material elaborado por Lorena Bulhosa