Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 01

Limites Laterais

Tópicos Adicionais

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 01
Limites Laterais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$, para $x < 3$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x \geq 3$. Determine o valor de b para que a imagem de f seja um intervalo.

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 7x + 21$, para $x < 9$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x \geq 9$. Determine o valor de b para que a imagem de f seja um intervalo.

Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 10x + 13$, para $x < 11$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x \geq 11$. Determine o valor de b para que a imagem de f seja um intervalo.

Exercício 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$, para $x \leq 3$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x > 3$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 3 sejam iguais.

Exercício 5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + 25$, para $x \leq 7$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x > 7$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 7 sejam iguais.

Exercício 6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$, para $x \leq 3$ e $f(x) = x^2 + b$ para $x > 3$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 3 sejam iguais.

Exercício 7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x-4}{|x-4|}$, para $x \neq 4$ e $f(x) = 0$ para $x = 4$. Determine os limites laterais no ponto $x = 4$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$, para $x \leq 3$ e $f(x) = x + b$ para $x > 3$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 3 sejam iguais.

Exercício 9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + 3$, para $x \leq 7$ e $f(x) = x + b$ para $x > 7$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 7 sejam iguais.

Exercício 10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 8x + 3$, para $x \leq 11$ e $f(x) = x + b$ para $x > 11$. Determine o valor de b para que os limites laterais no ponto 11 sejam iguais.

Exercício 11. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{81x^2 - 972x + 2916}}{x-6}$, para $x \neq 6$. Determine o limite lateral pela direita quando x se aproxima de 6.

Exercício 12. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{36x^2 - 216x + 324}}{x-3}$, para $x \neq 3$. Determine o limite lateral pela direita quando x se aproxima de 3.

Exercício 13. o Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{64x^2 - 512x + 1024}}{x-4}$, para $x \neq 4$. Determine o limite lateral pela direita quando x se aproxima de 4.

Exercício 14. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, para $x \neq 1$ e $f(x) = 0$ para $x = 1$. Determine os limites laterais no ponto $x = 1$. Em seguida, esboce o gráfico de f.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Se $m(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, para $x \neq 1$, determine para qual valor $m(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 1 pela esquerda.

Exercício 16. Se $m(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, para $x \neq 3$, determine para qual valor $m(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 9 pela esquerda.

Exercício 17. Se $m(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, para $x \neq 4$, determine para qual valor $m(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 4 pela esquerda.

Exercício 18. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{729x^3 - 13122x^2 + 78732x - 157464}}{x-6}$, para $x \neq 6$. Determine o limite lateral pela esquerda quando x se aproxima de 6.

Exercício 19. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{216x^3 - 1944x^2 + 5832x - 5832}}{x-3}$, para $x \neq 3$. Determine o limite lateral pela esquerda quando x se aproxima de 3.

Exercício 20. Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{216x^3 - 1296x^2 + 2592x - 1728}}{x-2}$, para $x \neq 2$. Determine o limite lateral pela esquerda quando x se aproxima de 2.

Exercício 21. Seja $f(x) = \dfrac{|x-7|}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$ para $x \neq 7$. Determine o limite lateral pela esquerda quando x se aproxima de 7.

Exercício 22. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{5}}$.

Respostas e Soluções.

1. Como a imagem do intervalo $(-\infty, 3)$ é o intervalo $(-\infty, 11)$ e a imagem de $[3, +\infty)$ é o intervalo $(9 + b, \infty)$. Devemos ter $b = 11 - 9 = 2$.

2. Como a imagem do intervalo $(-\infty, 9)$ é o intervalo $(-\infty, 84)$ e a imagem de $[9, +\infty)$ é o intervalo $(81 + b, \infty)$. Devemos ter $b = 84 - 81 = 3$.

3. Como a imagem do intervalo $(-\infty, 11)$ é o intervalo $(-\infty, 123)$ e a imagem de $[11, +\infty)$ é o intervalo $(121 + b, \infty)$. Devemos ter $b = 123 - 121 = 2$.

4. Como o limite lateral pela esquerda é 11 e o limite lateral pela direita é $9 + b$, devemos ter $b = 11 - 9 = 2$.

5. Como o limite lateral pela esquerda é 53 e o limite lateral pela direita é $49 + b$, devemos ter $b = 53 - 49 = 4$.

6. Como o limite lateral pela esquerda é 11 e o limite lateral pela direita é $9 + b$, devemos ter $b = 11 - 9 = 2$.

7. Para $x < 4$, temos $f(x) = \dfrac{x-4}{-(x-4)} = -1$. Por outro lado, para $x > 4$, temos $f(x) = \dfrac{x-4}{x-4} = 1$. Portanto, o limite lateral pela esquerda é -1 e pela direita é 1.

8. Como o limite lateral pela esquerda é $6 + 1$ e o limite lateral pela direita é $3 + b$, devemos ter $b = 7 - 3 = 4$.

9. Como o limite lateral pela esquerda é $28 + 3$ e o limite lateral pela direita é $7 + b$, devemos ter $b = 31 - 7 = 24$.

10. Como o limite lateral pela esquerda é $88 + 3$ e o limite lateral pela direita é $11 + b$, devemos ter $b = 91 - 11 = 80$.

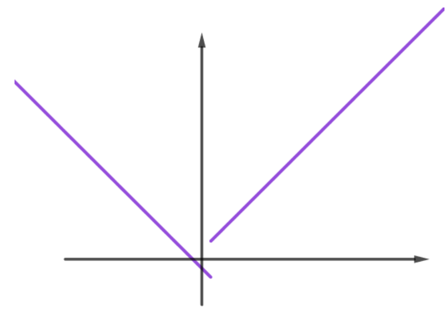
11. Para $x > 6$, $f(x) = 9 \cdot \dfrac{|x-6|}{x-6} = 9$. Portanto, o limite lateral pela direita é 9.

12. Para $x > 3$, $f(x) = 6 \cdot \dfrac{|x-3|}{x-3} = 6$. Portanto, o limite lateral pela direita é 6.

13. Para $x > 4$, $f(x) = 8 \cdot \dfrac{|x-4|}{x-4} = 8$. Portanto, o limite lateral pela direita é 8.

14. Para $x < 1$, temos $f(x) = \dfrac{x^2-1}{-(x-1)} = -(x+1)$. Nesse caso, o limite lateral pela esquerda é $-(1+1) = -2$. Por outro lado, para $x > 1$, temos $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$. Portanto, o limite lateral pela direita é $1 + 1 = 2$.

Além disso, o esboço do gráfico é:



15. Como $m(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$, segue que $m(x)$ se aproxima de $\sqrt{1} + 1 = 2$ quando x se aproxima de 1 pela esquerda.

16. Como $m(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x} + 3$, segue que $m(x)$ se aproxima de $\sqrt{9} + 3 = 6$ quando x se aproxima de 3 pela esquerda.

17. Como $m(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x} + 2$, segue que $m(x)$ se aproxima de $\sqrt{4} + 2 = 4$ quando x se aproxima de 4 pela esquerda.

18. Para $x > 6$, $f(x) = 9 \cdot \dfrac{(x-6)}{x-6} = 9$. Portanto, o limite lateral pela esquerda é 9.

19. Para $x > 3$, $f(x) = 6 \cdot \dfrac{(x-3)}{x-3} = 6$. Portanto, o limite lateral pela esquerda é 6.

20. Para $x > 2$, $f(x) = 6 \cdot \dfrac{(x-2)}{x-2} = 6$. Portanto, o limite lateral pela esquerda é 6.

21. Usando diferença de quadrados, temos:

$$x + 7 - 14 = (\sqrt{x+7} - \sqrt{14})(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})$$

Podemos substituir a relação anterior no limite com o intuito de eliminar a raiz $x = 7$ do denominador e do numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 7^+} \frac{|x-7|}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}} &= \lim_{x \to 7^+} |x-7| \cdot \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{14}}{x + 7 - 14} \\
&= \lim_{x \to 7^+} \sqrt{x+7} + \sqrt{14} \\
&= 2\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

22. Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} &= \lim_{x\to 1^+} (x-1)\cdot\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}}{2x+3-5} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}}{2} \\
&= \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM