Módulo de Leis dos Senos e dos Cossenos

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

1ª série E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Leis dos Senos e dos Cossenos
Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A **Recíproca do Teorema de Pitágoras**, enuncia que:

> "se as medidas dos três lados de um triângulo qualquer satisfazem a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo".

Dentre os ternos (a, b, c) de números inteiros listados, com $a < b < c$, qual(is) dele(s) poderiam ser lados de triângulo(s) retângulo(s)?

a) $(5, 12, 13)$.

b) $(8, 15, 17)$.

c) $(7, 24, 25)$.

d) $(12, 35, 37)$.

e) $(11, 60, 61)$.

f) $(20, 21, 29)$.

g) $(9, 40, 41)$.

Exercício 2. Dentre os ângulos agudos dos triângulos retângulos do exercício 1, qual possui o maior seno?

Exercício 3. Quais os senos, cossenos e tangentes dos ângulos agudos do triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

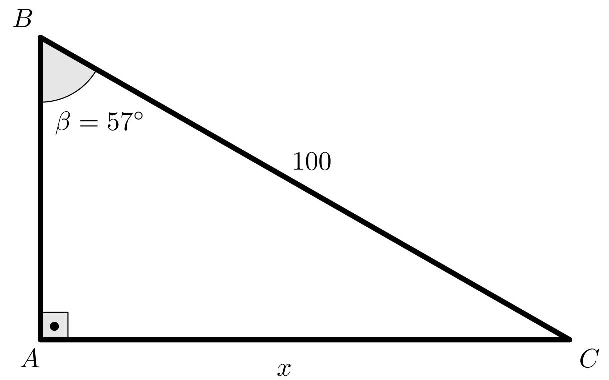
Exercício 4. Um triângulo tem lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm. Outro triângulo tem lados medindo 9 cm, 12 cm e 15 cm. Os ângulos desses triângulos são iguais?

Exercício 5. Utilizando os dados aproximados da tabela 2, calcule o que se pede.

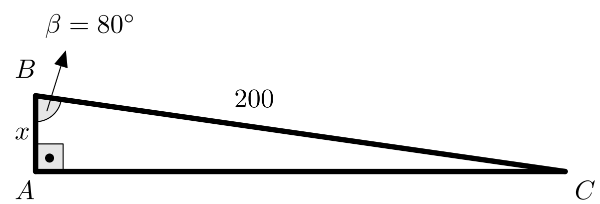
Tabela 2: Senos, cossenos e tangentes.

Arco	sen	cos	tg
$15°$	$0,26$	$0,97$	$0,27$
$20°$	$0,34$	$0,93$	$0,36$
$30°$	$0,5$	$0,87$	$0,58$
$40°$	$0,64$	$0,77$	$0,84$
$57°$	$0,84$	$0,54$	$1,54$
$80°$	$0,98$	$0,17$	$5,67$

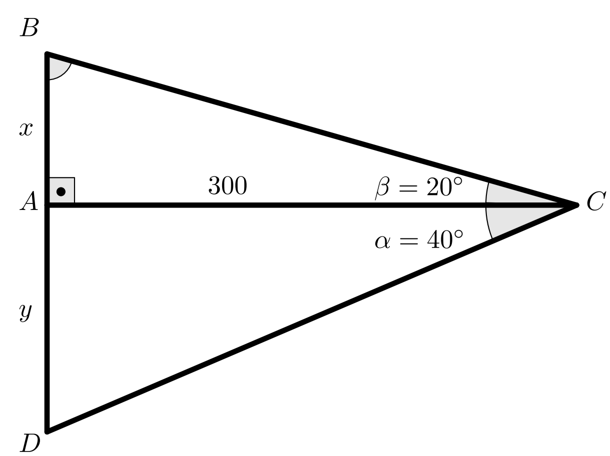
a) Determine valor de $AC = x$.



b) Determine valor de $AB = x$.



c) Determine valor de $BD = x + y$.



d) Seja o $\triangle ABC$, retângulo em B, com $B\hat{A}C = 15°$ e $D \in AB$ tal que $A\hat{D}C = 150°$. Sendo $DB = 400$ cm, qual o valor de BC?

e) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 34 e 93, qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de menor medida?

f) Um triângulo retângulo possui catetos medindo 26 e 97. Qual a medida aproximada do ângulo oposto ao cateto de maior medida?

Exercício 6. No triângulo da figura 2, calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes de α e β.

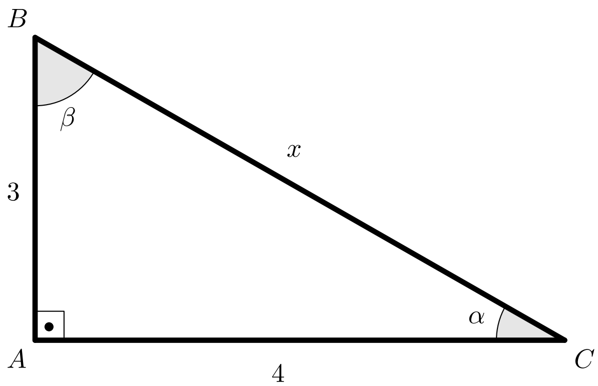


Figura 2

Exercício 7. Sendo $0 < \alpha < 90°$ e $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$. Quais os valores do cosseno e da tangente de α?

Exercício 8. Definindo a $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, demonstre, a partir da relação fundamental da trigonometria, que

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Exercício 9. A figura 3 representa um $\triangle ABC$, equilátero, com lado medido 2 cm e uma altura BH.

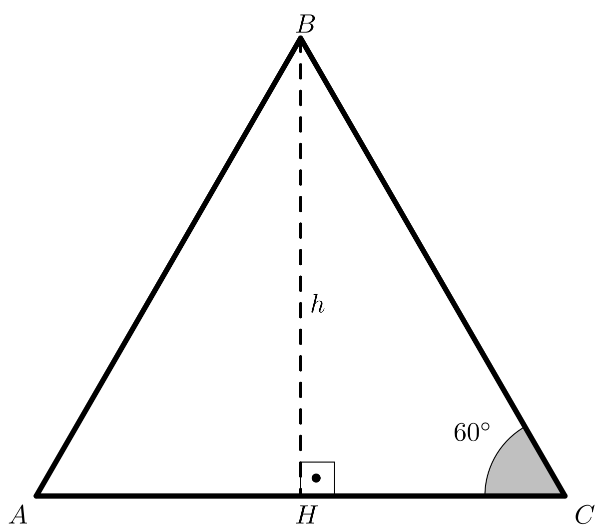


Figura 3

Quais os valores do(a):

a) $\operatorname{sen} 60°$, $\cos 60°$ e $\operatorname{tg} 60°$?

b) $\operatorname{sen} 30°$, $\cos 30°$ e $\operatorname{tg} 30°$?

Exercício 10. A partir de um quadrado de lado medindo 1 cm, determine as medidas dos seno, cosseno e da tangente de 45°.

Exercício 11. Sendo α um ângulo agudo num triângulo retângulo qualquer, prove que

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 12. Sobre uma rampa de 6 m de comprimento e inclinação de 30° com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 25 cm. Quantos degraus desse tipo serão construídos?

Exercício 13. Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14°. Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?
Dados: $\operatorname{tg} 10° = 0,1763$ e $\operatorname{tg} 14° = 0,2493$.

Exercício 14. Ao atender o chamado de um incêndio em um edifício, o corpo de bombeiros de uma cidade utilizou um veículo de combate a incêndio, dotado de escada magirus. Esse veículo possibilita atender a resgates a uma altura máxima de 54 metros, utilizando um ângulo máximo de levantamento de 60°.

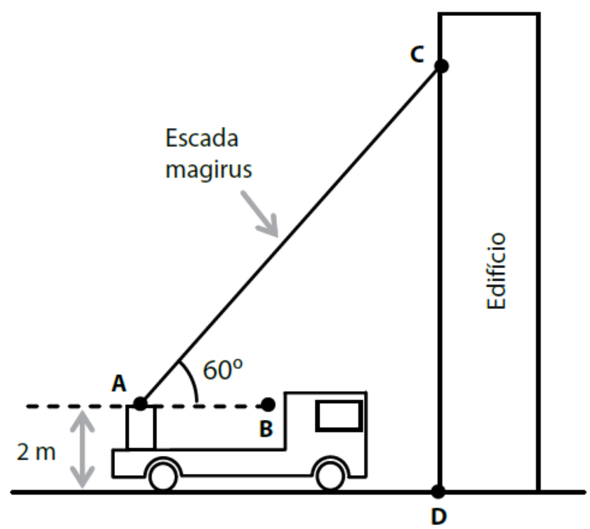


Figura 8

a) Qual o comprimento dessa escada quando totalmente esticada?

b) Houve um problema e o ângulo de levantamento foi reduzido em 25%. Qual a nova altura máxima alcançada?

Exercício 15. Seja x um número real positivo tal que

$$\sec x - \operatorname{tg} x = 1.$$

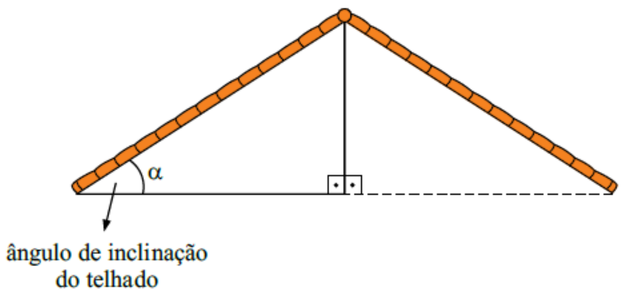
Calcule $\sec x + \operatorname{tg} x$.

Exercício 16. No triangulo ABC,

$$3 \operatorname{sen} A + 4 \cos B = 6 \quad \text{e} \quad 4 \operatorname{sen} B + 3 \cos A = 1$$

Encontre a medida do ângulo C.

Exercício 17. A inclinação de um telhado é determinada pela porcentagem da medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação (cateto na vertical) em relação à medida do cateto adjacente a esse ângulo (cateto na horizontal), em um triângulo retângulo associado a esse telhado.



α	sen α	cos α	tg α
5º	0,08716	0,99619	0,08749
5,5º	0,09585	0,99540	0,09629
6º	0,10453	0,99452	0,10510
9º	0,15643	0,98769	0,15838
9,5º	0,16505	0,98629	0,16734
18º	0,30902	0,95106	0,32492

Figura 9

É correto concluir que, em um telhado com $9,5\%$ de inclinação, o ângulo α está entre quais valores da tabela?

Exercício 18. Demonstre que a área S do $\triangle ABC$ (figura 10) pode ser calculada pela fórmula $S = \dfrac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$.

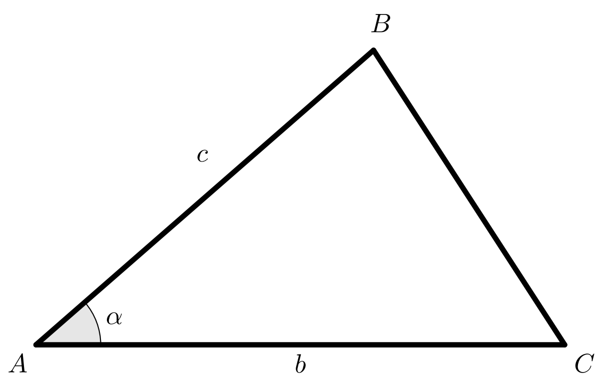


Figura 10

Exercício 19. No $\triangle ABC$ temos que $AB = \sqrt{2}\ cm$, $AC = 6\ cm$ e $B\hat{A}C = 45°$. Qual o valor da sua área?

Exercício 20. Percorrendo, ao longo de uma reta horizontal, a distância $d = AB$, em direção à base inacessível de um poste CD, nota-se (com o auxílio de um teodolito) que os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$ medem, respectivamente, α e β graus. Qual é a altura do poste CD?

Exercício 21. No triângulo da figura 12, qual a razão entre as áreas S_1 e S_2?

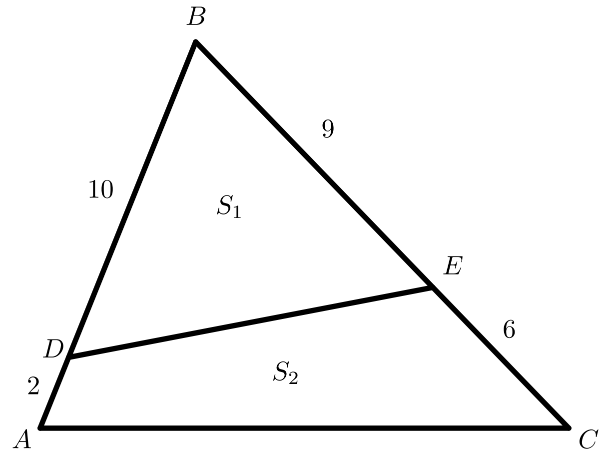


Figura 12

Exercício 22. Um enigma interessante ocorre quando movimentamos as "peças" da figura 13 e criamos a figura 14. Com as mesmas peças reordenadas, surge um quadradinho vazio na base. Explique esse fato.

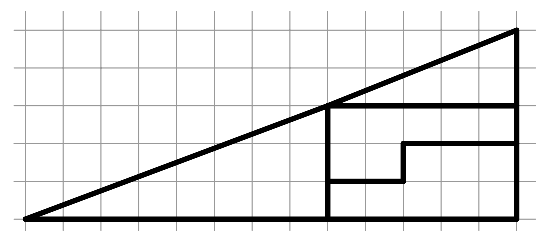


Figura 13

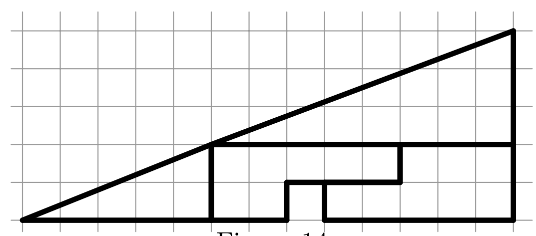


Figura 14

Exercício 23. A Torre Eiffel tem 324 m da altura (contando com a antena), e deseja-se fotografá-la completamente usando uma câmera com lente de abertura de 40°. Qual a mínima distância da torre (no plano da sua base) para que uma foto com essa câmera capture a torre inteira, como ilustra a figura 15? (Dados na tabela 2.)

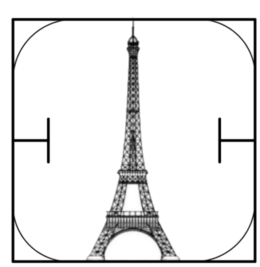


Figura 15

Exercício 24. Na figura 17, temos o $\triangle ABC$ com a altura $AH = 1$ cm.

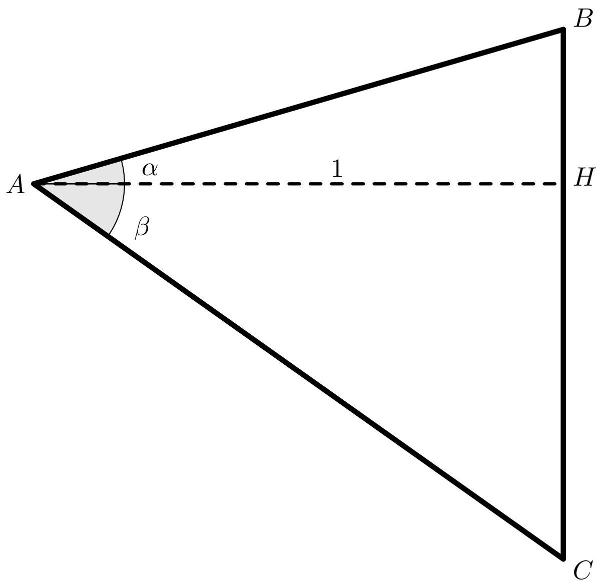


Figura 17

Sendo assim, calcule:

a) em função do ângulo α, o valor de AB.

b) em função do ângulo α, o valor de HB.

c) em função do ângulo β, o valor de AC.

d) em função do ângulo β, o valor de HC.

e) a área de $\triangle ABC$, em função de BC e da altura AH.

f) a área de $\triangle ABC$, utilizando a fórmula do exercício 18.

g) uma fórmula para o $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ a partir dos resultados dos itens e e f.

Exercício 25. A partir da análise da figura 18, demonstre que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

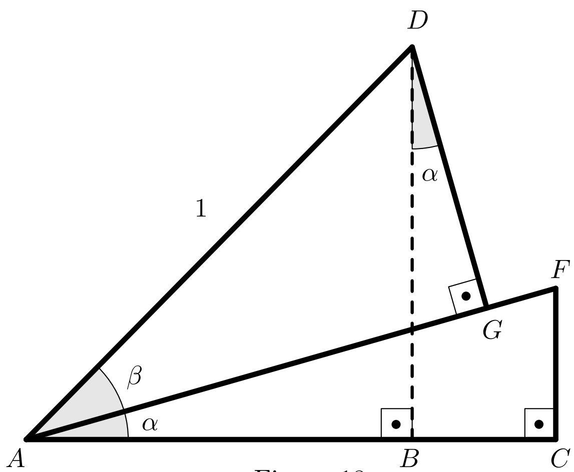


Figura 18

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 26. Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm. A soma das tangentes dos ângulos agudos é aproximadamente:

a) 1. b) 1,3. c) 2. d) 2,5. e) 2,8.

Exercício 27. Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 m do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: $30°$. O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\operatorname{tg} 30° = 0,57$. Se a altura do teodolito é $1,60$ m, qual é a altura, em metros, do morro obtida pelo topógrafo?

a) $352,48$. b) $125,60$. c) $118,20$. d) $115,60$. e) 114.

Exercício 28. Na figura 20, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida α. Sendo $AB = 1$ e $BC = 5$, determine o valor de $\cos\alpha$.

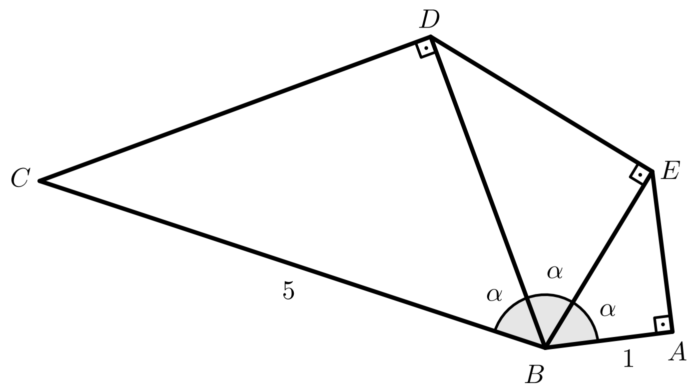


Figura 20

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. d) $\sqrt[3]{5}$. e) $\dfrac{1}{5}$.

Exercício 29. Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de $60°$ e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer $30°$, conforme a figura 21. A velocidade, em km/h, desse avião era de:

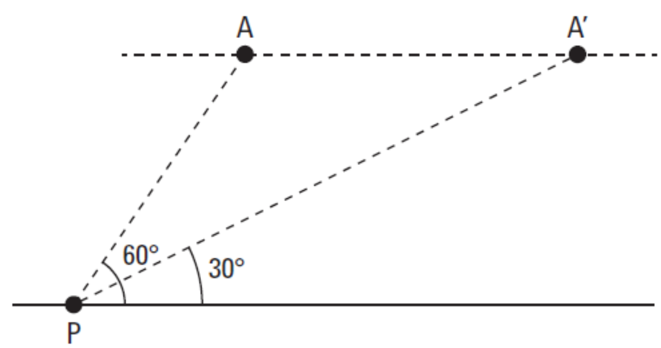


Figura 21

a) 180. b) 240. c) 120. d) 150. e) 200.

Exercício 30. Prove que:

a) $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$.

b) $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

c) $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

d) $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

e) $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

f) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

g) $\operatorname{sen}(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

h) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}$.

Exercício 31. Seja $0 < x < 90^\circ$ tal que

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos x = 2.$$

Qual o valor de $\cos(2x)$?

Exercício 32. Utilizando as fórmulas de somas de arcos, prove que:

a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

b) $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ) = 2$.

c) se $\alpha + \beta = 45^\circ$, então $(1 + \operatorname{tg}\alpha^\circ)(1 + \operatorname{tg}\beta^\circ) = 2$.

d) $(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg} 44^\circ)$ é quadrado perfeito.

Exercício 33. Faça o que se pede.

a) Calcule uma expressão equivalente a

$$\frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ}.$$

b) Prove que

$$\frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos 2014^\circ \cdot \cos 2015^\circ}$$

é igual a $\operatorname{tg} 2015^\circ$.

Exercício 34. Resolva os itens abaixo:

a) Prove que $(\operatorname{sen} 1^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 89^\circ) = \frac{(\operatorname{sen} 2^\circ)}{2}$.

b) Prove que $(\operatorname{sen} 2^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 88^\circ) = \frac{(\operatorname{sen} 4^\circ)}{2}$.

c) Sabendo que

$$(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 3^\circ)(\operatorname{sen} 5^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 87^\circ)(\operatorname{sen} 89^\circ) = \frac{1}{2^n},$$

qual o valor de n?

Exercício 35. Leia as proposições abaixo e depois desenvolva o que se pede.

Proposição 1. Para o $\triangle ABC$, com ceviana[4] BD, vale que:

$$\frac{(ABD)}{(CBD)} = \frac{AD}{CD},$$

onde (ABD) e (CBD) representam as áreas de $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$.

Para ver isso, basta usar que a área de um triângulo é o semiproduto da área da base pela sua altura correspondente.

Proposição 2. Para o $\triangle ABC$, bissetriz BD, $D \in AC$, é válido que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{CB}.$$

Desenvolva uma demonstração da proposição 2 utilizando a proposição 1 e a fórmula demonstrada no exercício 18.

Exercício 36. A partir do triângulo da figura 24 calcule:

a) $\operatorname{sen} 18^\circ$ e $\cos 18^\circ$.

b) $\operatorname{sen} 72^\circ$ e $\cos 72^\circ$.

c) $\operatorname{sen} 36^\circ$ e $\cos 36^\circ$.

d) $\operatorname{sen} 54^\circ$ e $\cos 54^\circ$.

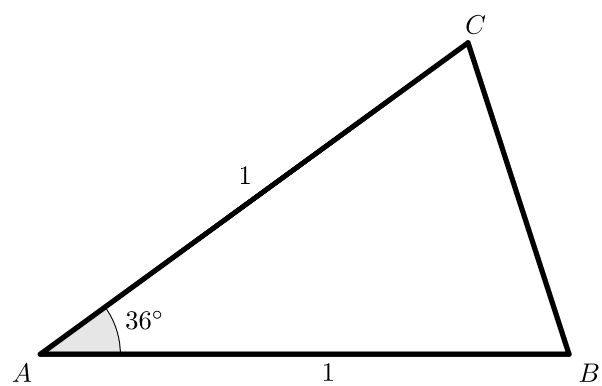


Figura 24

Exercício 37. A partir das fórmulas do cosseno da soma e do cosseno da diferença, prove que:

a) $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

b) $\cos 1^\circ - \cos 45^\circ = 2 \cdot \operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ$.

c) $1 - \operatorname{cotg} 23^\circ = \frac{2}{1 - \operatorname{cotg} 22^\circ}$.

Exercício 38. No retângulo $ABCD$, com um ponto E em AB, um ponto F em BC, $DF = 1$ u.c., sendo $D\hat{E}F$ reto, $A\hat{D}E = \alpha$ e $E\hat{D}F = \beta$, calcule.

a) Qual ângulo representa $\alpha + \beta$?

[4] **Ceviana** é qualquer segmento de reta num triângulo com uma extremidade no vértice do triângulo e a outra extremidade no lado oposto, no caso $D \in AC$.

b) Desenvolva outra demonstração para o $\cos(\alpha + \beta)$?

Exercício 39. O retângulo $ABCD$ foi dividido em três quadrados de lado 1 cm. Prove que

$$B\hat{H}C = B\hat{D}C + B\hat{G}C.$$

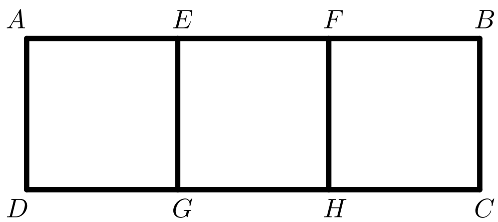


Figura 28

Exercício 40.

a) Prove que $\text{sen}(2x) = \dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1 + \text{tg}^2 x}$.

b) Prove que $\cos x = \dfrac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$.

c) Se $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ é um número racional ($\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$), prove que $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$ são números racionais.

d) Prove que $\text{tg}\,x = \text{cossec}(2x) - \text{cotg}(2x)$.

e) Reciprocamente, se $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$ são números racionais, prove que $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ é número racional.

Exercício 41. Um holofote está situado no ponto A, a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de vaivém, uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D, alinhados à base B, conforme demonstra a figura 30 abaixo:

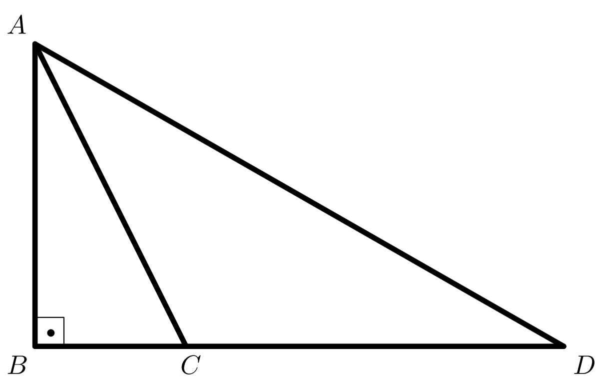


Figura 30

Se o ponto B dista 20 metros de C e 150 metros de D, a medida do ângulo $C\hat{A}D$ corresponde a:

a) 60° b) 45° c) 30° d) 15°

Exercício 42. Sendo $\text{sen}\,x + \cos x = \sqrt{2}$, qual o valor de

$$\text{sen}(2x)?$$

Exercício 43. A partir da figura 31, deduza as fórmulas

a) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha$; e

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

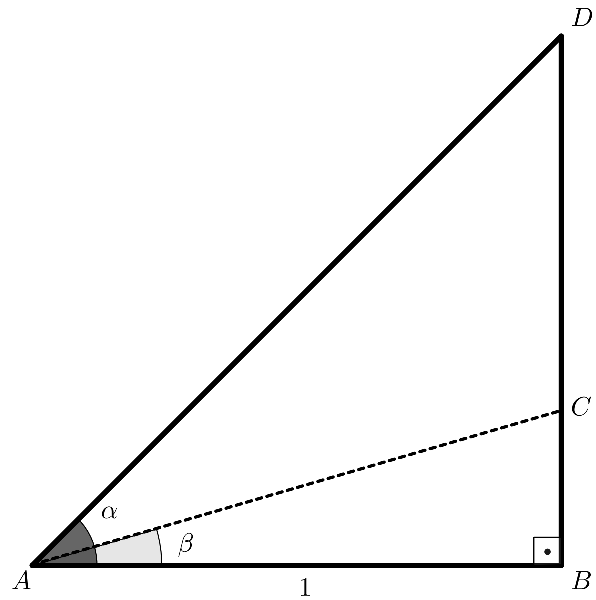


Figura 31

Exercício 44. Sendo x e y números reais tais que

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14.$$

Qual o valor mínimo de $x^2 + y^2$?

a) 2. b) 1. c) $\sqrt{3}$. d) $\sqrt{2}$.

Exercício 45. Usando as fórmulas das questões 24 e 25, resolva os itens a seguir.

a) Verifique que $(1 + \text{tg}\,k)(1 + \text{tg}(45° - k)) = 2$.

b) Dado que

$$(1 + \text{tg}\,1°)(1 + \text{tg}\,2°) \cdot \ldots \cdot (1 + \text{tg}\,45°) = 2^n,$$

calcule n.

Respostas e Soluções.

Observação: Neste módulo, serão estudadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Aplicaremos os conceitos de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa para definir os senos, cossenos e tangentes de cada ângulo. No geral, fazendo uso das marcações no triângulo da figura 1, teremos:

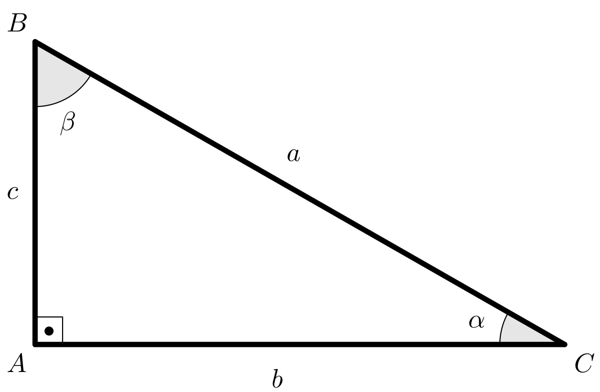


Figura 1

i) os catetos são b e c e a hipotenusa é a;

ii) em relação ao ângulo α, teremos c como cateto oposto e b como cateto adjacente (o inverso para β);

iii) definiremos o $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{c}{a}$ e o $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b}{a}$;

iv) definiremos o $\cos\alpha = \dfrac{b}{a}$ e o $\cos\beta = \dfrac{c}{a}$; e

v) definiremos a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{c}{b}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{c}$.

O que permite concluir que quando α e β forem complementares, isto é,

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

teremos $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$. Usando as substituições adequadas concluímos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$. Além disso, aplicando o Teorema de Pitágoras, poderemos concluir para ângulos agudos que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

A última equação é denominada "**Relação Fundamental**" e é válida para qualquer ângulo, não necessariamente o agudo. Outras funções trigonométricas importantes são $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ e $\operatorname{cossec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

1. Observe que todos os ternos satisfazem a Recíproca do Teorema de Pitágoras, portanto, todos poderiam ser lados em triângulos retângulos. Os dois números menores representariam as medidas dos catetos e o maior número, a medida da hipotenusa.

2. Em cada um dos triângulos retângulos da questão anterior há dois ângulos agudos. Definindo o $\operatorname{sen} i = \dfrac{\text{Cateto Oposto } i}{\text{Hipotenusa}}$, $i \in \{1, 2\}$, e calculando os respectivos valores, obtemos os resultados aproximados da tabela 1.

Tabela 1: Senos, cossenos e tangentes.

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa	Seno 1	Seno 2
5	12	13	$0,385$	$0,923$
8	15	17	$0,471$	$0,882$
7	24	25	$0,280$	$0,960$
12	35	37	$0,324$	$0,946$
11	60	61	$0,180$	$0,984$
20	21	29	$0,690$	$0,724$
9	40	41	$0,220$	$0,976$

Portanto, o maior seno é $\dfrac{60}{61} \cong 0,984$.

3. Observe que os lados do triângulo verificam a recíproca do "Teorema de Pitágoras", ou seja,

$$6^2 + 8^2 = 10^2.$$

Portanto, esse triângulo é retângulo com hipotenusa 10, com um dos seus ângulos agudos tendo seno igual a $\dfrac{6}{10}$, cosseno igual a $\dfrac{8}{10}$, tangente igual a $\dfrac{6}{8}$. O outro possui seno igual a $\dfrac{8}{10}$, cosseno igual a $\dfrac{6}{10}$ e tangente igual a $\dfrac{8}{6}$.

4. Pela Recíproca do Teorema de Pitágoras, temos que ambos são triângulos retângulos, pois,

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ e } 9^2 + 12^2 = 15^2.$$

No primeiro triângulo, um dos ângulos agudos (α_1) tem seno igual a $\dfrac{3}{5}$, cosseno igual a $\dfrac{4}{5}$ e tangente igual a $\dfrac{3}{4}$ e o outro (β_1) possui seno igual $\dfrac{4}{5}$, cosseno igual a $\dfrac{3}{5}$ e tangente igual a $\dfrac{4}{3}$. Já no segundo, teremos os mesmos valores de senos, cossenos e tangentes para α_2 e β_2, respectivamente. Portanto, nos dois triângulos teremos ângulos retos, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$.

5. Retirando os dados da tabela 2, obtemos:

a) Como $\operatorname{sen} 57^\circ = 0,84 = \dfrac{x}{100}$, temos $x = 84$;

b) Como $\cos 80° = 0,17 = \dfrac{x}{200}$, temos $x = 34$;

c) Como $\operatorname{tg} 20° = 0,36 = \dfrac{x}{300}$ temos $x = 108$. Além disso, como $\operatorname{tg} 40° = 0,84 = \dfrac{y}{300}$ temos $y = 252$. Portanto, $BD = 360$;

d) Observe que $\triangle DBC$ é isósceles de base BC, pois $D\hat{C}A = 15°$, então $CD = DA = 400$ cm. Sendo $BC = x$ e aplicando que $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{x}{400}$ concluiremos que $x = 200\ cm$;

e) Sejam α e β os ângulos opostos ao maior e menor catetos, respectivamente. Fazendo $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{34}{93} \cong 0,37$, encontraremos, pela tabela 2, que $\beta \cong 20°$;

f) Sejam α e β os ângulos opostos ao maior e menor catetos, respectivamente. Se fizermos a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{97}{26} \cong 3,73$, encontramos um valor fora da tabela 2. Contudo, para $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{26}{97} \cong 0,27$. Temos, $\beta \cong 15°$ e, portanto, $\alpha \cong 75°$.

6. (Adaptado da Vídeo Aula)
Inicialmente devemos calcular o valor da hipotenusa x utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 \\ x^2 &= 25 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Então, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ e $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{4}{3}$.

Comentário para professores: Na resolução da equação $x^2 = 25$ só foi destacada a sua raiz positiva, pois x representa a medida da hipotenusa.

7. Pela relação fundamental da trigonometria, temos que $(0,6)^2 + \cos^2\alpha = 1$. Daí, $\cos\alpha = 0,8$ e

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

8. Podemos dividir a relação por $\cos^2 x \neq 0$, obtendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \operatorname{tg}^2 x + 1 &= \sec^2 x \end{aligned}$$

■

9. (Adaptado da Vídeo Aula)
Na figura 4 podemos destacar o triângulo BHC , retângulo em H, e aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + h^2 \\ h^2 &= 3 \\ h &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

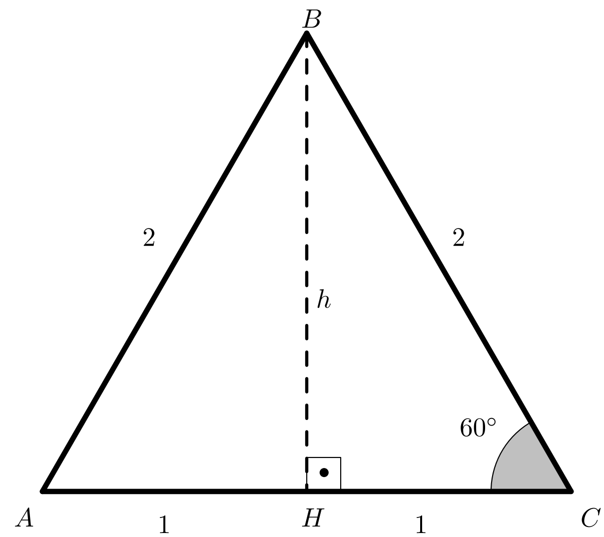


Figura 4

No mesmo triângulo, o ângulo de 60° terá cateto oposto igual a $\sqrt{3}$, cateto adjacente 1 e hipotenusa 2. Portanto $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, o que responde o item a). Como 60° e 30° são complementares, teremos:

i) $\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

ii) $\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$; e

iii) $\operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 30° = 1$. Assim, $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

10. Seja $ABCD$ o quadrado de lado 1 cm, pelo Teorema de Pitágoras, a sua diagonal medirá $\sqrt{2}$ cm e $B\hat{C}D = 45°$ (figura 5).

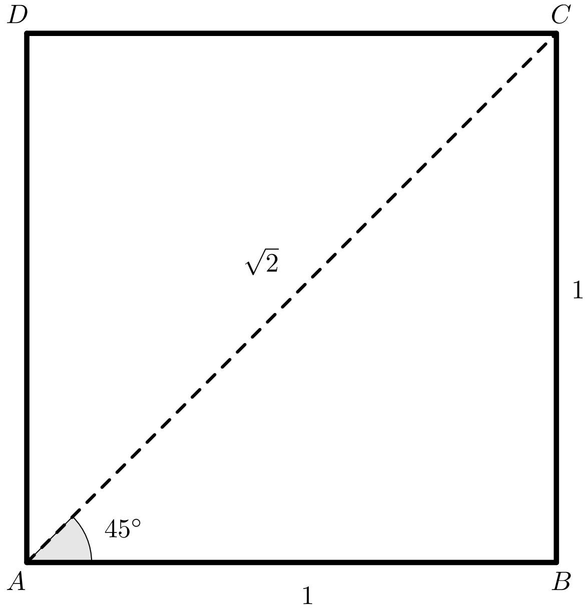


Figura 5

Portanto,

i) $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ii) $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

iii) $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{1}{1} = 1$.

Comentário para professores: Nos problemas 9 e 10 utilizamos triângulo e quadrado com comprimentos particulares de lados. A análise geral do problema (feita no vídeo), com lado medindo ℓ, pode ser tratada de modo análogo. Por hora, chegamos à tabela 3 dos senos, cossenos e tangentes dos arcos notáveis 30°, 45° e 60°.

Tabela 3: 30°, 45° e 60°.

Arco	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

11. Observando que $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ teremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

■

12. A rampa deve ser vista como a hipotenusa de um triângulo retângulo e a altura h será o cateto oposto ao ângulo de 30°. Então usaremos o $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{h}{6}$. Assim, $h = 3$ m ou 300 cm. Para a quantidade de degraus, basta dividirmos 300 por 25 obtendo 12 degraus.

13. (Extraído do material do IMPA/PAPMEM.)

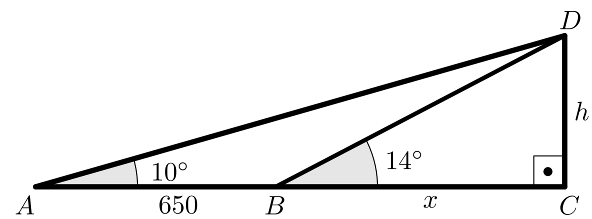


Figura 6

Sejam h a altura do Pão de Açúcar e x a distância de B ao pé da altura (figura 6). Então, teremos que

$$\operatorname{tg} 14° = \frac{h}{x} = 0,2493 \text{ e } \operatorname{tg} 10° = \frac{h}{650 + x} = 0,1763.$$

Após resolver o sistema, chegaremos a $h = 391,4$.

Comentário para professores:
Um dos instrumentos de medida usuais, baseado nas funções trigonométricas, é o teodolito (figura 7), que faz medidas de ângulos com imensa precisão na vertical e na horizontal[1].

rttr_Fig14_teodolito.png

Figura 7: Teodolito.

14.

a) (Adaptado do vestibular do IFSP/2014)
Sejam c o comprimento da escada e A' a projeção de A em CD. Como o alcance da escada é de 54 metros, teremos $A'C = 52\ m$. Usando que $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{52}{c}$, então $c = \dfrac{104}{\sqrt{3}} = \dfrac{104\sqrt{3}}{3}$ m.

b) Com a perda de 25% o novo ângulo será $0,75 \cdot 60° = 45°$. A nova altura máxima será $h' + 2$, com $A'C' = h'$, definindo C' como o ponto onde a escada toca o prédio. Fazendo $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{h'}{\frac{104}{\sqrt{3}}}$, temos $h' + 2 = \dfrac{52\sqrt{6} + 6}{3}\ m$.

[1] Imagem: Capítulo 4, ensinomedio.impa.br, acesso em 2004.

15. Desenvolvendo a equação inicial, destacando que $\cos x \neq 0$, chegamos a

$$\begin{aligned} \sec x - \tan x &= 1 \\ \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= 1 \\ 1 - \operatorname{sen} x &= \cos x \end{aligned}$$

Substituindo na relação fundamental teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + (1 - \operatorname{sen} x)^2 &= 1 \\ 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x &= 0 \\ \operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen} x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donde, $\operatorname{sen} x = 0$ (com $\cos x = 1$) ou $\operatorname{sen} x = 1$, e apenas o primeiro serve, pois para o segundo teríamos $\cos x = 0$, **absurdo**. Por fim, $\sec x = 1$ e $\operatorname{tg} x = 0$. Portanto

$$\sec x + \operatorname{tg} x = 1.$$

16. Elevando as duas equações ao quadrado, chegaremos a:

$$\begin{aligned} 3\operatorname{sen} A + 4\cos B &= 6 \\ (3\operatorname{sen} A + 4\cos B)^2 &= 6^2 \\ 9\operatorname{sen}^2 A + 24\operatorname{sen} A\cos B + 16\cos^2 B &= 36 \qquad (1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 4\operatorname{sen} B + 3\cos A &= 1 \\ (4\operatorname{sen} B + 3\cos A)^2 &= 1^2 \\ 16\operatorname{sen}^2 B + 24\operatorname{sen} B\cos A + 9\cos^2 A &= 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

Somando (1) com (2), teremos

$$\begin{aligned} 16 + 24\operatorname{sen} A\cos B + 24\operatorname{sen} B\cos A + 9 &= 36 + 1 \\ 25 + 24(\operatorname{sen} A\cos B + \operatorname{sen} B\cos A) &= 36 + 1 \\ 24(\operatorname{sen} A\cos B + \operatorname{sen} B\cos A) &= 12 \\ \operatorname{sen}(A + B) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo, $A + B = 30°$ e então $C = 150°$.

17. (Extraído do vestibular do Centro Universitário São Camilo SP/2014)
A inclinação do telhado é determinada pela tangente de α. Sendo assim, $\operatorname{tg}\alpha = 9,5\% = 0,095$, o que resulta em $5° < \alpha < 5,5°$.

18. A partir da altura $BH = h$ relativa à AC, temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{c}$ e $h = c \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (figura 11).

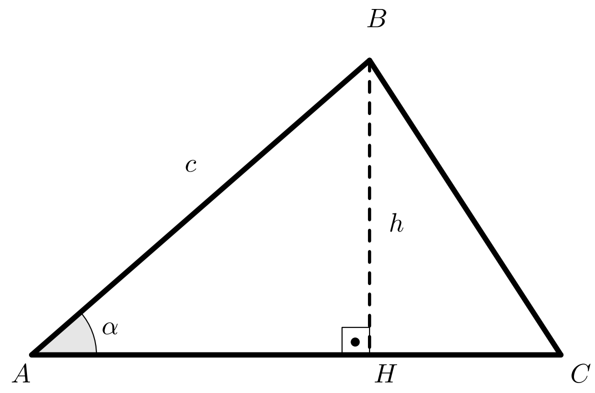


Figura 11

Por fim, como a base $AC = b$, $S = \frac{bh}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}$. ■

19. $S_{ABC} = \frac{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 45°}{2} = 3 \text{ cm}^2$.

20. Temos $CD = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = BC \cdot \operatorname{tg}\beta$. Como $AC = BC + d$, vem $(BC + d) \cdot \operatorname{tg}\alpha = BC \cdot \operatorname{tg}\beta$. Daí,

$$BC = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

e

$$CD = BC \cdot \operatorname{tg}\beta = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

21. Seja S a área do $\triangle ABC$, então $S_2 = S - S_1$. Tomando como base o ângulo $A\hat{B}C = \beta$, teremos que:

$$\begin{aligned} S &= \frac{12 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}; \\ S_1 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}; \text{ e} \\ S_2 &= \frac{12 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}}{\frac{12 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos concluir que $S_1 = S_2$.

22. A justaposição das figuras não geram os triângulos retângulos maiores que aparentam estar no desenho[2]. No triângulo menor, temos que o ângulo agudo da base tem $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2}{5}$ e no maior, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3}{8}$. Logo, a figura 13 não é um triângulo (nem a figura 14), por isso, na reorganização, surge um quadradinho branco. Após a movimentação, a suposta "hipotenusa" da figura grande muda levemente a curvatura, avançando a diferença de 1 quadradinho que surge.

[2]Tal ilusão é conhecida como o "Paradoxo do quadrado perdido"

23. (Extraído do Geogebra.org)

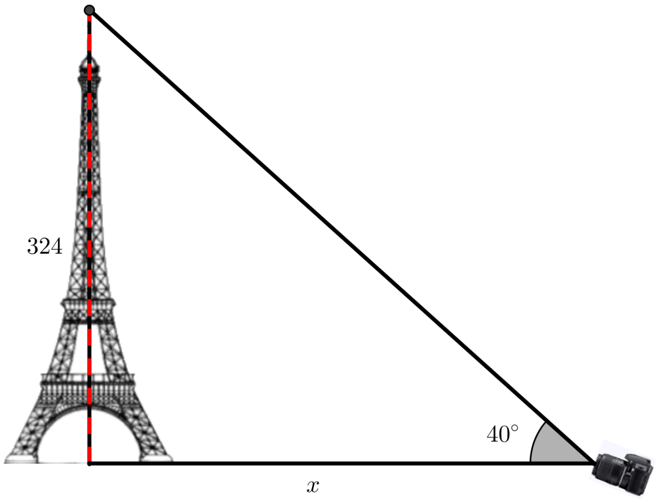


Figura 16

Usando que $\operatorname{tg} 40^\circ = \dfrac{324}{x}$, obteremos que $x \cong 385,72$ metros. (a aproximação foi para "cima", se a fizéssemos para baixo poderíamos perder parte da antena da torre).

24.

a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{HB}{AB} \Rightarrow HB = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

c) $\cos\beta = \dfrac{1}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{1}{\cos\beta}$.

d) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

e) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{BC \cdot AH}{2} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{2}$.

f) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{2}$.

g) Pelos itens e e f teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \end{aligned}$$

25. Sendo E a interseção de AF com BD, temos que:

i) $AB = \cos(\alpha+\beta)$;

ii) $DG = \operatorname{sen}\beta$;

iii) $AG = \cos\beta$;

iv) $EG = \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

v) $AE = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$;

vi) $BE = \cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha$; e

vii) $ED = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}$.

Perceba que $\triangle ABD$ e $\triangle AGD$ podem ser inscritos na mesma semicircunferência[3] (figura 19).

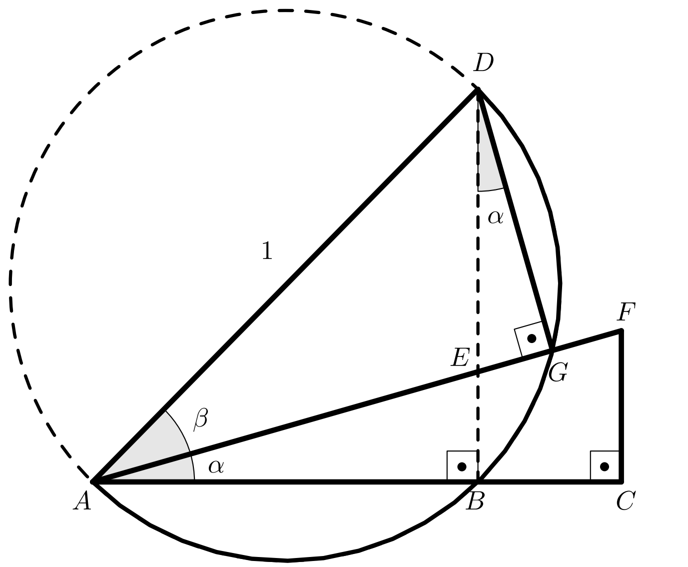


Figura 19

Podemos aplicar a potência do ponto E fazendo

$$\begin{aligned} AE \cdot EG &= DE \cdot EB \\ (\cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha &= \cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha} \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

■

Observação: $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, por definição. Daí, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ e $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. Essas fórmulas serão demonstradas, para ângulos agudos, na questão 43.

26. (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Como a hipotenusa mede 13 e um dos catetos mede 5, pelo Teorema de Pitágoras, o outro cateto mede 12. Os ângulos agudos terão tangentes iguas a $\dfrac{5}{12}$ e $\dfrac{12}{5}$. Portanto, $\dfrac{5}{12} + \dfrac{12}{5} \cong 2,8$ e a resposta é letra **E**.

27. (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Seja x o cateto oposto a 30°. Então $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{x}{200} = 0,57$. Logo, $x = 114\ m$ e a altura do morro é de $x = 114 + 1,6 = 115,6$ m. Portanto, resposta é letra **D**.

[3] $ABGD$ é quadrilátero inscritível

28. (Extraído do exame do PROFMAT/2014)
Sejam $BD = y$ e $BE = x$. Portanto, no $\triangle BDC$, temos que $\cos\alpha = \dfrac{y}{5}$. Analisando agora o $\triangle BED$, temos $\cos\alpha = \dfrac{x}{y}$ e, finalmente, no $\triangle BAE$, temos $\cos\alpha = \dfrac{1}{x}$. Resolvendo esse sistema, teremos que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ e, portanto, a resposta é a letra **B**.

29. (Extraído do vestibular da ESPM/2014)
Sejam r e s as retas representadas da figura 21, onde s é a tracejada. Denomine a projeção de A na reta r como o B. Então, $\cos 60^\circ = \dfrac{PB}{8}$ e $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{AB}{8}$. Portanto, $AB = 4\sqrt{3}\ km$ e $PB = 4\ km$. Chame de B' a projeção de A' na reta r. Perceba que $AB = A'B' = 4\sqrt{3}\ km$. Consequentemente, $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{4\sqrt{3}}{PB'}$, isto é, $PB' = 12\ km$. Por fim, $AA' = 8$ km. Como o avião percorreu essa distância em dois minutos, em uma hora iria percorrer $8 \cdot 30 = 240\ km$. Assim, a resposta é a letra **B**.

30. Usaremos que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

a) Sendo $\alpha = \beta = x$ teremos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+x) &= \operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}x\cos x\\ \operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}x\cos x\end{aligned}$$

■

b) Sendo $\alpha = \beta = \dfrac{x}{2}$ teremos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ \operatorname{sen}(x) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

■

c) A partir da relação fundamental da trigonometria, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2x + \cos^2x &= 1\\ \operatorname{sen}^2x &= 1 - \cos^2x\end{aligned}$$

■

d) Análogo ao anterior.

e) Sendo $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ e tomando $\alpha = \beta = x$ teremos $\cos(x+x) = \cos x\cos x - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}x$ que é o mesmo que $\cos(2x) = \cos^2x - \operatorname{sen}^2x$. ■

f) Aplicando c em e, temos o que foi pedido. ■

g) Análogo ao anterior.

h) Essa é uma rearrumação da fórmula do do item f.

31. (Adaptado da Olimpíada de Matemática do RJ)

$$\begin{aligned}(1+\operatorname{tg}^2x)\cos x &= 2\\ \sec^2x\cdot\cos x &= 2\\ \cos x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sendo $0 < x < 90^\circ$, temos $x = 60^\circ$. Por fim, como $\cos(2x) = 2\cos^2x - 1$, obteremos

$$\cos(120^\circ) = 2\cos^2 60^\circ - 1 = -\frac{1}{2}.$$

32. Para resolver essa questão, utilizaremos as fórmulas:

i) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$; e

ii) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

a) Podemos fazer

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\end{aligned}$$

■

b) Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(1^\circ + 44^\circ) &= \operatorname{tg}45^\circ\\ \frac{\operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}44^\circ}{1 - \operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}44^\circ} &= 1\\ 1 - \operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}44^\circ &= \operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}44^\circ\\ \operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}44^\circ + \operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}44^\circ &= 1\\ 1 + \operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}44^\circ + \operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}44^\circ &= 2\\ (1+\operatorname{tg}1^\circ) + \operatorname{tg}44^\circ(1+\operatorname{tg}1^\circ) &= 2\\ (1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}44^\circ) &= 2\end{aligned}$$

■

c) Análogo ao anterior.

d) Usando os itens anteriores concluímos que a expressão é igual a 2^{22}, um quadrado perfeito cuja raiz quadrada é $2^{11} = 2048$. ■

Observação: Para a $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ devemos usar os fórmulas de $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ e $\cos(\alpha-\beta)$ e assim chegaremos a

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

33. Observe que $1 = k + 1 - k$, portanto

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 1^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\
\frac{\operatorname{sen}(k+1-k)^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\
\frac{\operatorname{sen}(k+1)^\circ \cos k^\circ - \operatorname{sen} k^\circ \cos(k+1)^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\
\frac{\operatorname{sen}(k+1)^\circ \cos k^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} - \frac{\operatorname{sen} k^\circ \cos(k+1)^\circ}{\cos k^\circ \cdot \cos(k+1)^\circ} &= \\
= \quad \operatorname{tg}(k+1)^\circ - \operatorname{tg} k^\circ.
\end{aligned}$$

b) (Adaptado da Olimpíada de Matemática do RJ) Utilizando o item a, podemos reescrever a expressão original como

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ + \cdots \\
&\quad \cdots + \operatorname{tg} 2015^\circ - \operatorname{tg} 2014^\circ \quad = \quad \operatorname{tg} 2015^\circ.
\end{aligned}$$

■

34. Para resolver este item, utilizaremos as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= \cos(90^\circ - \alpha); \text{ e} \\
\operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.
\end{aligned}$$

a) $(\operatorname{sen} 1^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 89^\circ) = (\operatorname{sen} 1^\circ) \cdot (\cos 1^\circ) = \dfrac{(\operatorname{sen} 2^\circ)}{2}$. ■

b) $(\operatorname{sen} 2^\circ) \cdot (\operatorname{sen} 88^\circ) = (\operatorname{sen} 2^\circ) \cdot (\cos 2^\circ) = \dfrac{(\operatorname{sen} 4^\circ)}{2}$. ■

c) (Extraído da Olimpíada de Matemática do RJ)

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 3^\circ)(\operatorname{sen} 5^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 87^\circ)(\operatorname{sen} 89^\circ) &= \\
\frac{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 3^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 89^\circ)(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 88^\circ)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} &= \\
\frac{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\operatorname{sen} 89^\circ)(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 46^\circ)(\operatorname{sen} 45^\circ)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} &= \\
\frac{(\operatorname{sen} 1^\circ)(\cos 1^\circ)(\operatorname{sen} 2^\circ)(\cos 2^\circ)\ldots(\cos 44^\circ)(\operatorname{sen} 45^\circ)}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} &= \\
\frac{\frac{(\operatorname{sen} 2^\circ)}{2}\frac{(\operatorname{sen} 4^\circ)}{2}\ldots\frac{(\operatorname{sen} 88^\circ)}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})}{(\operatorname{sen} 2^\circ)(\operatorname{sen} 4^\circ)(\operatorname{sen} 6^\circ)\ldots(\operatorname{sen} 86^\circ)(\operatorname{sen} 88^\circ)} &= \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= \\
\frac{1}{2^{44}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} &= \\
= \quad \frac{1}{2^{\frac{89}{2}}}
\end{aligned}$$

Portanto, $n = 44,5$.

35. Usando os valores da figura 22, teremos pela proposição 1 que $\dfrac{(ABD)}{(CBD)} = \dfrac{x}{y}$.

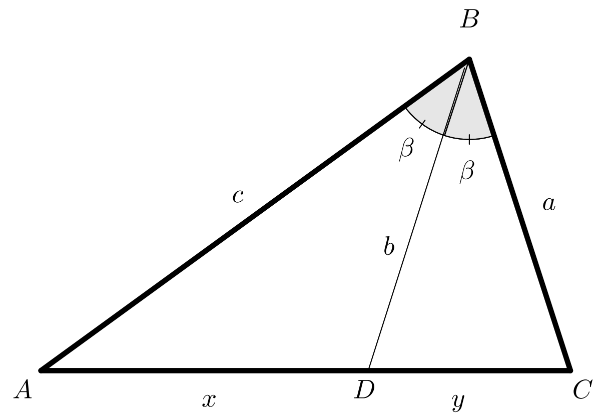


Figura 22

Aplicando o resultado do exercício 18 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{cb \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}}{\frac{ab \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}} &= \frac{x}{y} \\
\frac{c}{a} &= \frac{x}{y} \\
\frac{AD}{AB} &= \frac{DC}{CB}.
\end{aligned}$$

O que demonstra a proposição 2. ■

Comentário para professores: A proposição 2 é conhecida também como "Teorema da Bissetriz Interna" ou, pela forma lúdica, "Teorema da Bailarina". Esse segundo nome deve-se ao truque de memorização usado para lembrar das razões ennvolvidas em seu enunciado que podem ser associados a um movimento de Balé (figura 23).

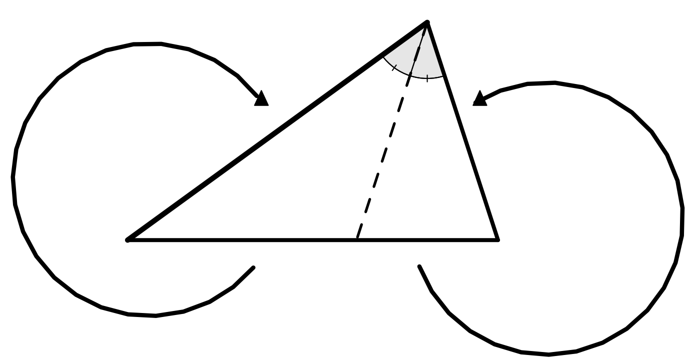


Figura 23

Em resumo, num $\triangle ABC$ com bissetriz BD, $D \in AC$, como na figura 22, temos que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{CB}.$$

36. $A\hat{B}C = B\hat{C}A = 72°$, pois ABC é isósceles de base BC (figura 25).

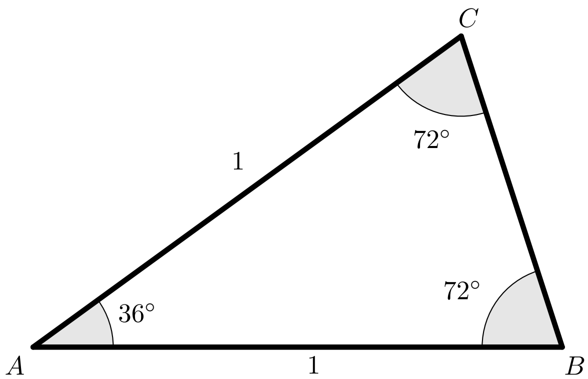


Figura 25

A bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ encontra AB no ponto D e separa os triângulos isósceles ADC, de base AC, e BDC, de base BD. Donde segue que $CD = AD = BC = x$ e $BD = 1 - x$ (figura 26).

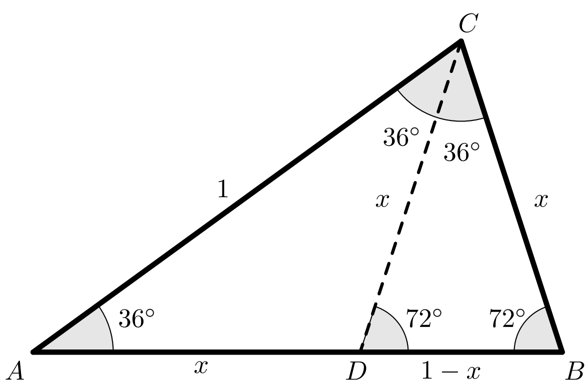


Figura 26

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1} &= \frac{1-x}{x}\\
x^2 &= 1 - x\\
x^2 + x - 1 &= 0\\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Com $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, pois $x > 0$. A bissetriz de $B\hat{A}C$ (que contém as altura e mediana relativas a BC) tem interseção com BC em H. (figura 27).

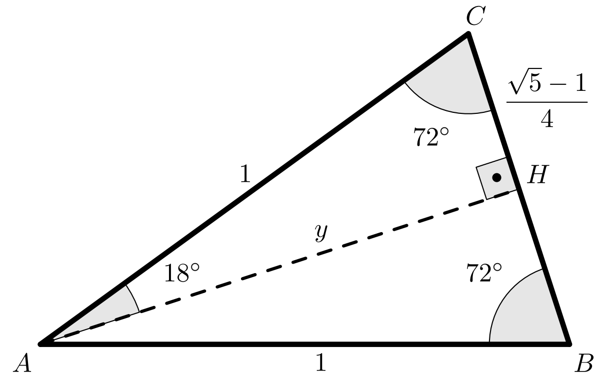


Figura 27

No $\triangle AHB$, retângulo em H, teremos que calcular o valor do cateto $AH = y$, portanto

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + y^2 &= 1^2\\
5 - 2\sqrt{5} + 1 + 16y^2 &= 16\\
16y^2 &= 10 + 2\sqrt{5}\\
y &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

Obtemos assim

a) $\operatorname{sen} 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;

b) $\operatorname{sen} 72° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ e $\cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

c) Para $36°$, utilizaremos as fórmulas de arco duplo.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 36° &= \operatorname{sen}(18° + 18°)\\
&= 2 \operatorname{sen}(18°) \cos(18°)\\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\
&= \frac{\sqrt[4]{20}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 36° &= \cos(18° + 18°)\\
&= \cos^2 18° - \operatorname{sen}^2 18°\\
&= \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\\
&= \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}\\
&= \frac{4\sqrt{5}-2}{16}\\
&= \frac{2\sqrt{5}-1}{8}
\end{aligned}$$

d) $\operatorname{sen} 54^\circ = \dfrac{2\sqrt{5}-1}{8}$ e $\cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt[4]{20}}{4}$.

37.

a) As fórmulas do cosseno da soma e da subtração são

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (3)\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \qquad (4)\end{aligned}$$

Fazendo (4) − (3), teremos

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

■

b) Usando a fórmula do item a,

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

fazendo $a-b = 1^\circ$ e $a+b = 1^\circ$ teremos $a = 23^\circ$ e $b = 22^\circ$, o que demonstra o pedido. ■

c) Provar o solicitado é equivalente a provar que

$$\begin{aligned}(1-\operatorname{cotg} 23^\circ)(1-\operatorname{cotg} 22^\circ) &= 2\\ \left(1-\frac{\cos 23^\circ}{\operatorname{sen} 23^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 22^\circ}{\operatorname{sen} 22^\circ}\right) &=\\ \frac{(\operatorname{sen} 23^\circ - \cos 23^\circ)(\operatorname{sen} 22^\circ - \cos 22^\circ)}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &=\\ \frac{A-B}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &=\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}A &= \cos 23^\circ \cos 22^\circ + \operatorname{sen} 22^\circ \operatorname{sen} 23^\circ\\ &= \cos(23^\circ - 22^\circ)\\ &= \cos 1^\circ \quad \text{e}\\ B &= \operatorname{sen} 22^\circ \cos 23^\circ - \operatorname{sen} 23^\circ \cos 22^\circ\\ &= \operatorname{sen}(22^\circ + 23^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\end{aligned}$$

pelo item b, teremos

$$\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ = \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{2}.$$

Por fim, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{A-B}{\operatorname{sen} 23^\circ \cdot \operatorname{sen} 22^\circ} &= \frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{\frac{\cos 1^\circ - \cos 45^\circ}{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

■

38.

a) Como $D\hat{E}A = 90^\circ - \alpha$, $B\hat{E}F = \alpha$ e $B\hat{F}E = 90^\circ - \alpha$. De modo análogo, $D\hat{F}E = 90^\circ - \beta$ e $D\hat{F}C = \alpha + \beta$.

b) Temos no:

i) $\triangle DEF$, $DE = \cos\beta$ e $EF = \operatorname{sen}\beta$;

ii) $\triangle ADE$, $AD = DE \cdot \cos\alpha$ e $AE = DE \cdot \operatorname{sen}\alpha$;

iii) $\triangle BEF$, $BE = EF \cdot \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ e $BE = EF \cdot \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$; e

iv) $\triangle CDF$, $CD = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ e $CF = \cos(\alpha+\beta)$.

Concluímos que,

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= AD\\ &= BF + FC\\ &= \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

■

39. Pela figura 29, queremos provas que $\theta = \alpha + \beta$.

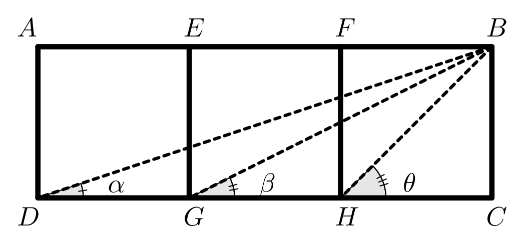


Figura 29

Temos que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}\theta = 1$. Utilizando a tangente da soma, chegamos a

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\ &= \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}\\ &= 1\\ &= \operatorname{tg}\theta\\ \alpha+\beta &= \theta.\end{aligned}$$

■

40.

a) Basta desenvolver os dois membros da equação.

b) Basta desenvolver os dois membros da equação.

c) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática) Supondo que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p}{q}$, p inteiro e q inteiro não nulo e usando as identidades dos itens a e b teremos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{2p}{q}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{p^2+q^2} \text{ e } \cos\alpha = \frac{1-\frac{p^2}{q^2}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2},$$

o que conclui que $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são também racionais. ∎

d) Basta desenvolver os dois membros da equação.

e) (Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática) Utilizando a identidade do item d teremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{cossec}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}$$

Daí, como $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e portanto a divisão por $\operatorname{sen}\alpha$ existe, a $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é racional.

41. (Extraído do vestibular da UERJ RJ) Sendo $\alpha = B\hat{A}C$ e $\beta = C\hat{A}B$, teremos $B\hat{A}D = \alpha+\beta$. Daí, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{150}{30} = 5$. Assim,

$$\begin{aligned} 5 &= \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\ &= \frac{\frac{2}{3}+\operatorname{tg}\beta}{1-\frac{2}{3}\cdot\operatorname{tg}\beta}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 5 - \frac{10}{3}\cdot\operatorname{tg}\beta &= \frac{2}{3}+\operatorname{tg}\beta \\ 15 - 10\cdot\operatorname{tg}\beta &= 2+3\operatorname{tg}\beta \\ \operatorname{tg}\beta &= 1. \end{aligned}$$

Por fim, $\beta = 45°$, que está na letra **B**.

42. Com $\operatorname{sen}x + \cos x = \sqrt{2}$, teremos

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}x+\cos x)^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ \operatorname{sen}^2x + 2\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2x &= 2 \\ 1+\operatorname{sen}(2x) &= 2 \\ \operatorname{sen}(2x) &= 1. \end{aligned}$$

43. Observe que $C\hat{A}D = \alpha - \beta$ e:

i) $AB = \frac{1}{\cos\beta} = \sec\beta$;

ii) $AD = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$;

iii) $BC = \operatorname{tg}\beta$;

iv) $BD = \operatorname{tg}\alpha$;

v) $DC = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$;

vi) $A\hat{D}C = 90° - \alpha$; e

vii) $\operatorname{sen}(90°-\alpha) = \cos\alpha$.

a) Pela lei dos senos, obteremos que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\cos\beta}}{\operatorname{sen}(90°-\alpha)} &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} \\ \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} &= \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \end{aligned}$$

∎

b) Pela lei dos cossenos, teremos que

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2 = \sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Desenvolvendo as expressões anteriores e utilizando que

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \sec^2\alpha = -1 \text{ e } \operatorname{tg}^2\beta - \sec^2\beta = -1$$

encontraremos

$$\begin{aligned} -1-1-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta &= -2\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} &= 1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned}$$

∎

44. (Extraído da Olimpíada de Matemática da China) Como $x+5, y-2 \in [-14, 14]$, podemos escrever $x+5 = 14\cos\theta$ e $y-12 = 14\operatorname{sen}\theta$, para $\theta \in [0, 2\pi[$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (14\cos\theta-5)^2 + (14\operatorname{sen}\theta+12)^2 \\ &= 365 - 140\cos\theta + 336\operatorname{sen}\theta \\ &= 365 + 28(12\operatorname{sen}\theta - 5\cos\theta) \\ &= 365 + 28\cdot 13\operatorname{sen}(\theta-\alpha) \\ &= 365 + 364\operatorname{sen}(\theta-\alpha), \end{aligned}$$

com $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Daí, o mínimo x^2+y^2 ocorrerá quando $365+364\operatorname{sen}(\theta-\alpha)$ for o menor possível. Ou seja, quando $\operatorname{sen}(\theta-\alpha) = -1$. O que resulta em $\text{mín}\,\{x^2+y^2\} = 1$. Isso ocorre quando $\theta = \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$, ou seja, $x = \frac{5}{13}$ e $y = -\frac{12}{13}$. A resposta está na letra **B**.

45. (Extraído do Banco de Questões da OBMEP - 2015)

a) Observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(45^\circ - k) + 1 &= \frac{\operatorname{sen}(45^\circ - k)}{\cos(45^\circ - k)} + 1 \\
&= \frac{\operatorname{sen} 45^\circ \cos k - \cos 45^\circ \operatorname{sen} k}{\cos 45^\circ \cos k + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} k} + 1 \\
&= \frac{\cancel{\sqrt{2}/2} \cos k - \cancel{\sqrt{2}/2} \operatorname{sen} k}{\cancel{\sqrt{2}/2} \cos k + \cancel{\sqrt{2}/2} \operatorname{sen} k} + 1 \\
&= \frac{\dfrac{\cos k}{\cos k} - \dfrac{\operatorname{sen} k}{\cos k}}{\dfrac{\cos k}{\cos k} + \dfrac{\operatorname{sen} k}{\cos k}} + 1 \\
&= \frac{1 - \operatorname{tg} k}{1 + \operatorname{tg} k} + 1 \\
&= \frac{2}{1 + \operatorname{tg} k}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $(\operatorname{tg}(45^\circ - k) + 1)(\operatorname{tg} k + 1) = 2$. ■

b) O item anterior nos permite agrupar os primeiros 44 termos do produto dado, através de pares da forma $(\operatorname{tg}(45^\circ - k) + 1)(\operatorname{tg} k + 1)$, em 22 produtos iguais a 2. Como $1 + \operatorname{tg} 45^\circ = 2$, segue que $2^n = 2^{23}$ e $n = 23$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com