Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Notação Científica e Dízimas

Oitavo Ano

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Escreva os seguintes números na notação científica:*

a) 45673.

b) $0,0012345$.

c) -555.

d) $0,09$

Exercício 2. *Escreva o período dos decimais periódicos:*

a) $0,342342342\ldots$.

b) $58,6777\ldots$.

c) $456,989898\ldots$.

Exercício 3. *Encontre a fração geratriz de:*

a) $0,333\ldots$.

b) $0,121212\ldots$

c) $6,\overline{5}$.

d) $-0,666\ldots$.

Exercício 4. *Obtenha as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:*

a) $4,7222\ldots$.

b) $1,8999\ldots$.

c) $1,2010101\ldots$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. *Sem efetuar a divisão, determine se a fração corresponde a um decimal exato ou a uma dízima periódica.*

a) $\dfrac{321}{320}$.

b) $\dfrac{15}{6}$.

c) $\dfrac{41}{15}$.

d) $\dfrac{3}{40}$.

Exercício 6. *Dizemos que um inteiro positivo x está escrito na notação científica se é da forma $x = m \cdot 10^k$ onde k é um inteiro e m satisfaz:*

a) m *é inteiro.*

b) $1 \le |m| < 10$.

c) $m < 1$.

d) $1 \le m < 10$.

e) $0 < m < 1$.

Exercício 7. *Assinale qual o maior dentre os números seguintes:*

a) $1,0\overline{1}$.

b) $1,0\overline{12}$.

c) $1,0\overline{102}$.

d) $1,011\overline{25}$.

e) $1,0\overline{11}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. *Considere o número*

$$X = 1,01001000100001\ldots.$$

(O padrão se mantém, ou seja, a quantidade de zeros entre números uns consecutivos sempre aumenta exatamente uma unidade).

a) Qual é a sua 25^a casa decimal após a vírgula?

b) Qual é a sua 500^a casa decimal após a vírgula?

c) O número X é racional ou irracional?

Exercício 9. *Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\dfrac{1}{5^{12}}$?*

(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 4 *(d)* 5 *(e)* 7.

Exercício 10. *O valor da expressão*

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0,666\ldots)} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{(1,333\ldots)}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

é igual a:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ *(b)* $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ *(c)* $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

(d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ *(e)* $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Exercício 11. *Observe as multiplicações:*

$$\begin{aligned}
142857 \cdot 1 &= 142857\\
142857 \cdot 2 &= 285714\\
142857 \cdot 3 &= 428571\\
142857 \cdot 4 &= 571428\\
142857 \cdot 5 &= 714285\\
142857 \cdot 6 &= 857142\\
142857 \cdot 7 &= 999999
\end{aligned}$$

Da última multiplicação, podemos concluir que $\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999} = 0,\overline{142857}$. *Veja que as seis primeiras multiplicações produzem números com os mesmos dígitos de* 142857 *e este é exatamente o período da representação decimal de* $\frac{1}{7}$. *Você consegue descobrir um número primo* p *maior que* 7 *tal que o período da dízima que representa* $\frac{1}{p}$ *possui* $p-1$ *casas decimais?*

Exercício 12. *Considere um primo* p *que divide* $10^n + 1$ *para algum* n *inteiro positivo. Por exemplo,* $p = 7$ *divide* 10^3+1. *Analisando o período da representação decimal de* $\frac{1}{p}$, *verifique que o número de vezes que o dígito* i *aparece é igual ao número de vezes que o dígito* $9-i$ *aparece para cada* $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Exercício 13. *Considere um número primo* p *que não divide* 10 *e suponha que o período da representação decimal de* $\frac{1}{p}$ *seja* $2k$. *É sempre possível decompormos o período em dois blocos de dígitos consecutivos que somam* 10^k-1? *Por exemplo, o período de* $\frac{1}{7}$ *tem tamanho* $6 = 2k$ *pois é igual à* 142857. *Veja que* $142 + 857 = 999 = 10^3 - 1 = 10^k - 1$.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1.

a) $4,5673 \cdot 10^4$.

b) $1,2345 \cdot 10^{-3}$.

c) $-5,55 \cdot 10^2$.

d) $9 \cdot 10^{-2}$.

2. *a)* 342.

b) 7.

c) 98.

3. *a)*

$$\begin{aligned} x &= 0,333\ldots \\ 10x &= 3,333\ldots \Rightarrow \\ 9x &= 3 \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 0,121212\ldots \\ 100x &= 12,121212\ldots \Rightarrow \\ 99x &= 12 \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 6,555\ldots \\ 10x &= 65,555\ldots \Rightarrow \\ 9x &= 59 \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{59}{9}$.

d)

$$\begin{aligned} x &= -0,666\ldots \\ 10x &= -6,666\ldots \Rightarrow \\ 9x &= -6 \end{aligned}$$

Logo, $x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$.

4.

a)

$$\begin{aligned} x &= 4,7222\ldots \\ 10x &= 47,222\ldots \\ 100x &= 472,222\ldots \Rightarrow \\ 90x &= 425 \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{425}{90} = \frac{85}{18}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 1,8999\ldots \\ 10x &= 18,999\ldots \\ 100x &= 189,999\ldots \Rightarrow \\ 90x &= 171 \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{171}{90} = \frac{19}{10}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 1,2010101\ldots \\ 10x &= 12,010101\ldots \\ 1000x &= 1201,010101\ldots \Rightarrow \\ 990x &= 1189 \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{1189}{990}$.

2 Exercícios de Fixação

5. *a) Decimal exato. Isso ocorre pois o denominador só possui fatores primos 2 e 5.*

b) Decimal exato. Isso ocorre pois $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ *e o denominador só possui fator 2.*

c) Dízima periódica. Trata-se de uma fração irredutível com um fator primo no denominador que não é 2 e nem 5. De fato, $\frac{41}{15} = 2,7333\ldots$.

d) Decimal exato. Isso ocorre pois o denominador só possui fatores primos 2 e 5.

6. *(B)*

7. *Resposta B.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

8. *a)* 0.

b) Um grupo de k zeros é separado de um grupo seguinte de $k+1$ zeros por exatamente um número 1. Assim, contando até o dígito 1 que sucede um grupo de k zeros, temos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{algarismos\ zeros}+\underbrace{k}_{algarismos\ uns}=\frac{k(k+3)}{2}.$$

Se $k=30$, já teremos $\frac{30(33)}{2}=495$. Consequentemente a 500^a casa decimal vale zero pois está no grupo com 31 zeros.

c) O número X não é racional porque sua representação decimal não é periódica uma vez que a quantidade de algarismos zeros entre dois 1's consecutivos sempre está aumentando.

9.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5^{12}} &= \frac{1}{5^{12}}\cdot\frac{2^{12}}{2^{12}}\\ &= \frac{2^{12}}{10^{12}}\end{aligned}$$

Como $2^{12}=4096$, o primeiro dígito não nulo após a vírgula é 4. Resposta C.

10. *Veja que*

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot(0,666\ldots)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{6}{9}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{6^2\cdot 9}}\\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0-\frac{1}{1,333\ldots}} &= \sqrt{1-\frac{1}{12/9}}\\ &= \sqrt{1-\frac{9}{12}}\\ &= \sqrt{\frac{3}{12}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão procurada é:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\right]^{-1/2} &= \left[\frac{10}{18}\right]^{-1/2}\\ &= \frac{3}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Resposta E

11. *Um valor possível para p é 17 pois:*

$$\frac{1}{17}=0,05882352994117647.$$

Todos os primos menores que 100 que satisfazem essa propriedade são:

$$7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.$$

Comentário para professores: *Seja p um número primo que não divide 10 e seja n um inteiro com $0<n<p$. Se d é o menor inteiro positivo tal que 10^d-1 é múltiplo de p, é possível mostrar que o período da representação decimal de $\frac{n}{p}$ é exatamente d. No exemplo anterior, como 7 não divide $10^1-1, 10^2-1, \ldots, 10^5-1$ e divide 10^6-1, temos $d=6$.*

12. *Podemos escrever $10^n+1=p\cdot a$ onde a é um número com não mais que n dígitos na base 10, digamos $a=a_1a_2\ldots a_n$. Queremos dizer com isso que cada número a_i é um dos dígitos de a. Mesmo que ele possua estritamente menos que n dígitos, podemos colocar alguns a_i's da esquerda como sendo 0. Temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{a}{a\cdot p}\\ &= \frac{a}{10^n+1}\\ &= \frac{a(10^n-1)}{10^{2n}-1}\\ &= \frac{[10^n(a-1)+(10^n-1)-(a-1)]}{10^{2n}-1}\end{aligned}$$

O número 10^n-1 é constituido por n números iguais a 9 e a diferença $(10^n-1)-(a-1)$ reduz cada um desses dígitos 9 por um dígito de a. Assim, a representação decimal do numerador é:

$$a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n-1)(9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_{n-1})(10-a_n).$$

O numero anterior representa o período da representação de $\frac{1}{p}$ e cada dígito i pode ser pareado com um outro dígito da forma $9-i$. Assim, as quantidades de aparições de tais dígitos são iguais. No exemplo do enunciado, o período de $1/7$ é 142857 e temos os seguintes pareamentos:

$$\begin{array}{ccc}1 & \to & 8\\ 4 & \to & 5\\ 2 & \to & 7\end{array}$$

13. *Como $10^{2k}-1=(10^k-1)(10^k+1)$ e p é primo, um dentre 10^k-1 e 10^k+1 é múltiplo de p. Não podemos ter 10^k-1 múltiplo de p pois caso contrário poderíamos escrever $\frac{1}{p}=\frac{(10^k-1)/p}{10^k-1}$ e obteríamos uma dízima periódica com período menor do que $2k$. Sendo assim, p divide*

$10^k + 1$ *e podemos usar repetir a solução anterior para concluir que o período da representação decimal de* $1/p$ *é da forma:*

$a_1a_2 \dots a_{k-1}(a_k - 1)(9 - a_1)(9 - a_2) \dots (9 - a_{k-1})(10 - a_k)$.

Somando o número formado pelos k primeiros dígitos com o número formado pelos k últimos, obtemos $\underbrace{99\dots9}_{k \text{ vezes}} =$

$10^k - 1$.