Módulo de Geometria Analítica – Parte 2

Circunferência

3^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Geometria Analítica – Parte 2
Circunferência

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em cada item abaixo, determine as equações geral e reduzida das circunferências

a) de centro $(0,0)$ e raio 1.

b) de centro $(1,2)$ e raio 3.

c) de centro $(-1,5)$ e raio 4.

Exercício 2. Determine em cada item abaixo se o respectivo ponto P é interno, externo ou pertence à circunferência em questão.

a) $P(0,-3)$ e $x^2+y^2-8x+4y+19=0$.

b) $P(1,-2)$ e $x^2+y^2-10x+2y-10=0$.

c) $P(3,2)$ e $x^2+y^2-6x+5=0$.

Exercício 3. Determine o centro e o raio das circunferências a seguir.

a) $x^2+y^2-8x+4y+19=0$.

b) $x^2+y^2-10x+2y-10=0$.

c) $x^2+y^2-6x+5=0$.

Exercício 4. Qual a equação da circunferência, situada no terceiro quadrante, que é tangente aos eixos coordenados e tem raio igual 4?

Exercício 5. Determine a medida do raio da circunferência, situada no primeiro quadrante, que é tangente aos eixos coordenados e que é tangente à reta $t: 3x+4y-12=0$.

Exercício 6. O segmento AB é um diâmetro de uma circunferência, com $A(1,1)$ e $B(3,-3)$. Quais as abscissas dos os pontos de interseção dessa circunferência com o eixo Ox?

Exercício 7. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, uma circunferência de raio 3 tem centro no I quadrante e tangencia a reta de equação $t: \sqrt{3}x-y=0$ e o eixo Ox. Quais as coordenadas do centro desta circunferência?

Exercício 8. Uma circunferência passa pelos pontos $A(2,0)$, $B(2,4)$ e $C(0,4)$. Qual a distância do seu centro à origem?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. A circunferência de equação

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0$$

intersecta o eixo das abcissas nos pontos M e N. Qual a distância entre M e N?

Exercício 10. Qual a reta que passa pelo centro da circunferência

$$x^2+y^2+6x+4y+12=0$$

e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares?

Exercício 11. Qual o raio da circunferência que passa pelos pontos $A(0,4)$ e $B(4,0)$ e que tem centro pertencente à reta $t:\ x-6=0$?

Exercício 12. Sabendo que o raio da circunferência de equação

$$x^2+y^2+6x-4y+k=0$$

mede 10 unidades de comprimento, qual o valor de k?

Exercício 13. Qual o comprimento da corda que a reta de equação $y=2x+2$ determina, na circunferência de equação $x^2+y^2=4$?

Exercício 14. Um octógono regular está inscrito na circunferência de equação

$$x^2+y^2=8.$$

Qual a área desse octógono?

Exercício 15. Considere as circunferências definidas por

$$(x+4)^2+(y-1)^2=36$$

e

$$(x+5)^2+(y-1)^2=25,$$

representadas no mesmo plano cartesiano. Quais as coordenadas do ponto de interseção entre elas?

Exercício 16. Em um sistema de coordenadas cartesianas, as retas $t:\ 3x-4y+4=0$ e $u:\ 3x-4y+20=0$ são tangentes a uma circunferência cujo centro está localizado sobre o semieixo negativo das abscissas. Qual a equação que representa esta circunferência?

Exercício 17. Uma máquina moderna usa um sistema de coordenadas cartesianas xOy para representar a forma e a dimensão (mapear) dos objetos que serão cortados, furados etc.. Uma chapa metálica delgada triangular é mapeada pelo triângulo de vértices $A(–3,0)$, $B(1,4)$ e $C(5,–4)$ e será feito um furo circular de raio uma unidade de comprimento, com centro no centro de massa dessa chapa (baricentro do triângulo). Para realizar esse procedimento com precisão, a máquina calcula a equação cartesiana do círculo. Qual a equação dessa circunferência?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 18. Seja $P(m, n)$ o ponto pertencente à circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$$

e que tem ordenada mínima. Qual o valor do produto $m \cdot n$?

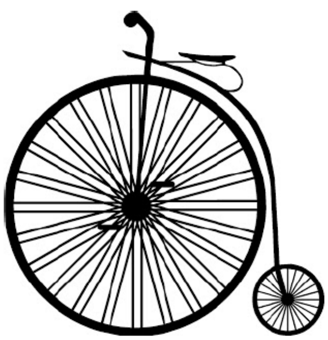
Exercício 19. Qual a distância do ponto $P(-2, 3)$ ao centro da circunferência

$$\lambda : x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0?$$

Exercício 20. Qual o raio da circunferência determinada pela equação

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0?$$

Exercício 21. A figura abaixo refere-se a uma bicicleta construída no século XIX, no ano de 1870.



Considere as duas rodas como duas circunferências cujas equações são dadas por:

$$C_1 : x^2 + y^2 + 40x - 100y + 400 = 0$$
e
$$C_2 : x^2 + y^2 - 100x - 40y + 2500 = 0.$$

Determine a distância entre os centros das rodas.

Exercício 22. A equação $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, em que m e n são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x + 1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto $(-3, 4)$. Quais os valores de m e n?

Respostas e Soluções.

1. Uma circunferência de centro (a, b) e raio R tem equação reduzida dada por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Desenvolvendo-a, teremos a equação geral equivalente a

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

a) A circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, tem equações:

- reduzida: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1$
- geral: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) A circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3, tem equações:

- reduzida: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
- geral: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

c) A circunferência de centro $(-1, 5)$ e raio 4, tem equações:

- reduzida: $(x - (-1))^2 + (y - 5)^2 = 16$
- geral: $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$

2. Basta substituirmos os pontos em cada uma das respectivas expressões da circunferência.

a) Substituindo $P(0, -3)$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 19 &= \\ 0^2 + (-3)^2 - 8 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + 19 &= \\ &= 16. \end{aligned}$$

Então, o ponto é externo à circunferência.

b) Substituindo $P(1, -2)$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 &= \\ 1^2 + (-2)^2 - 10 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 10 &= \\ &= -21. \end{aligned}$$

Então, o ponto é interno à circunferência.

c) $P(3, 2)$ e $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 &= \\ 3^2 + 2^2 - 6 \cdot 3 + 5 &= \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então, o ponto pertence à circunferência.

3. Vamos completar quadrados para reduzir as equações.

a) Observe que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 19 &= 0 \\ x^2 - 8x + y^2 + 4y &= -19 \\ x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y &= -19 \\ x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 &= -19 + 16 + 4 \\ (x - 4)^2 + (y + 2)^2 &= 1 \\ (x - 4)^2 + (y - (-2))^2 &= 1^2. \end{aligned}$$

Assim, o raio é 1 e o centro é $(4, -2)$.

b) Observe que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 &= 0 \\ x^2 - 10x + y^2 + 2y &= 10 \\ x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + y^2 + 2 \cdot 1 \cdot y &= 10 \\ x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 + y^2 + 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2 &= 10 + 25 + 1 \\ (x - 5)^2 + (y + 1)^2 &= 36 \\ (x - 5)^2 + (y - (-1))^2 &= 6^2. \end{aligned}$$

Assim, o raio é 6 e o centro é $(5, -1)$.

c) Observe que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 5 &= 0 \\ x^2 - 6x + y^2 &= -5 \\ x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + y^2 &= -5 \\ x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 + y^2 &= -5 + 9 \\ (x - 3)^2 + y^2 &= 4 \\ (x - 3)^2 + y^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

Assim, o raio é 2 e o centro é $(3, 0)$.

4. Como a circunferência é tangente aos eixos, então seu centro será com coordenadas iguais, $C(a, a)$, com $a < 0$ (C está no III quadrante). Como a distância do centro aos pontos de tangência são as mesmas e o raio é igual a 4, podemos concluir que o centro é o ponto $(-4, -4)$ e a equação geral é

$$(x - (-4))^2 + (y - (-4))^2 = 4^2,$$

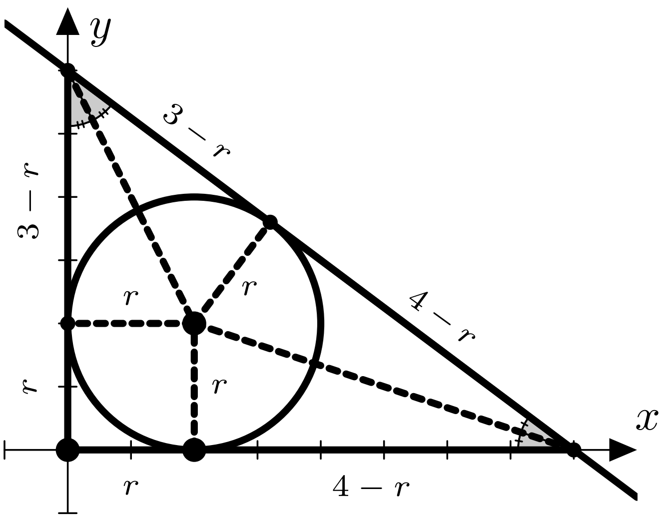
e a sua reduzida é

$$x^2 + y^2 + 8x + 8y + 16 = 0.$$

5. Como o centro é $C(a,a)$ e raio $R = a$, podemos escrever a circunferência como

$$C : (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2.$$

Observe agora o triângulo formado pelas interseções de t com os eixos coordenados, que são pontos $(0,3)$ e $(4,0)$, e a origem do sistema cartesiano. Esse triângulo é retângulo com lados medindo 3, 4 e 5. A circunferência da questão está inscrita neste triângulo (observe a figura abaixo).



Daí, podemos concluir que

$$\begin{aligned} 3-r+4-r &= 5 \\ -2r &= 5-7 \\ r &= 1. \end{aligned}$$

6. Como AB é diâmetro, então o centro da circunferência é seu ponto médio, ou seja, $C(\frac{1+3}{2}, \frac{1-3}{2}) = C(2,-1)$. O diâmetro mede

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (-3-1)^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Assim, o raio é $\sqrt{5}$ e a equação reduzida é

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.$$

Por fim, as interseções com o eixo x ocorrem quando $y = 0$, o que gera

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (0+1)^2 &= 5 \\ x^2 - 4x + 4 + 1 - 5 &= 0 \\ x^2 - 4x &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, $x = 0$ ou $x = 4$.

7. Sendo as distância entre o centro C da circunferência e a reta r igual ao raio $R = 3$, podemos escrever $d(C,t) = R = 3$. Além disso, pela tangência ao eixo Ox temos também que $y_C = 3$. Agora, fazendo a distância do centro $C(x_C, 3)$ até a reta t obtemos

$$\begin{aligned} d_{C,t} &= \left| \frac{\sqrt{3}\cdot x_C - 3}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} \right| \\ 3 &= \left| \frac{\sqrt{3}\cdot x_C - 3}{2} \right| \\ 6 &= \left| \sqrt{3}\cdot x_C - 3 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= \sqrt{3}\cdot x_C - 3 \\ 9 &= \sqrt{3}\cdot x_C \\ x_c &= \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -6 &= \sqrt{3}\cdot x_C - 3 \\ -3 &= \sqrt{3}\cdot x_C \\ x_c &= \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Por fim, como $x_c > 0$, então $x_C = 3\sqrt{3}$.

8. Como $\triangle ABC$ é retângulo em B, temos que o centro da circunferência está no ponto médio do diâmetro AC. Assim, o centro será $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1,2)$, cuja distância até a origem é

$$d_{C,O} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

9. A interseção com o eixo das abscissas ocorre quando $y = 0$. Assim, podemos fazer

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 &= 0 \\ x^2 + 0^2 - 4x - 2\cdot 0 - 4 &= 0 \\ x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \\ x_1 &= 2 + 2\sqrt{2} \\ x_2 &= 2 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

cuja distância entre eles é

$$|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}.$$

10. O centro da circunferência dada é o ponto $(-3,-2)$ e uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes pares tem coeficiente angular igual a (-1). Daí, a reta fica $y = -x + b$ e para calcular o valor de b basta substituirmos o ponto $(-3,-2)$, ficando com $b = -5$ e a equação da reta $x + y + 5 = 0$.

11. Como o centro C pertence a $x-6=0$, então $x_C=6$. Agora, queremos um ponto de t que é equidistante de A e B. Daí, vamos fazer

$$\begin{aligned} d_{A,C} &= d_{B,C} \\ \sqrt{6^2+(y_C-4)^2} &= \sqrt{(6-4)^2+y_c^2} \\ 36+(y_C)^2-8y_C+16 &= 4+(y_C)^2 \\ 8y_C &= 48 \\ y_C &= 6. \end{aligned}$$

Por fim, o comprimento do raio será igual a

$$\begin{aligned} d_{A,C} &= \sqrt{6^2+(6-4)^2} \\ &= \sqrt{36+4} \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

12. Sendo $C(a,b)=(-3,2)$ o centro da circunferência e $R=10$ o seu raio, podemos escrever

$$\begin{aligned} k &= a^2+b^2-R^2 \\ &= (-3)^2+2^2-(10)^2 \\ &= 9+4-100 \\ &= -89. \end{aligned}$$

13. As interseções entre a reta e a circunferência pode ser obtida da resposta do sistema

$$\begin{cases} y=2x+2 \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$$

que, após uma substituição fica,

$$\begin{aligned} x^2+(2x+2)^2 &= 4 \\ x^2+4x^2+8x+4 &= 4 \\ 5x^2+8x &= 0, \end{aligned}$$

cujas raízes são 0 e $-\dfrac{8}{5}$. A corda então tem extremos em $(0,2)$ e $\left(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$ e seu comprimento é

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{8}{5}-0\right)^2+\left(-\frac{6}{5}-2\right)^2} &= \\ \sqrt{\frac{64}{25}+\frac{256}{25}} &= \\ \sqrt{\frac{320}{25}} &= \\ &= \frac{8\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

14. Um octógono regular é formado por 8 triângulos isósceles adjacentes, cujos lados medem o mesmo valor que o raio da circunferência circunscrita e com o ângulo não congruente igual a $45°$.
Da equação $x^2+y^2=8$, concluímos que $R=2\sqrt{2}$. Então, podemos calcular a área do octógono como

$$8\cdot S_{\triangle}=8\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot \operatorname{sen}45°}{2}=16\sqrt{2}\text{ u.a..}$$

15. Podemos subtrair as duas equações encontrando

$$\begin{aligned} (x+5)^2-(x+4)^2 &= -11 \\ x^2+10x+25-x^2-8x-16 &= -11 \\ 2x &= -20 \\ x &= -10, \end{aligned}$$

com $y=1$. Por fim, o ponto de interseção é o $(-10,1)$.

16. Primeiro, perceba que $t \parallel u$. Assim, para calcularmos o diâmetro, basta termos o distância entre as retas. Como o ponto $P(0,1)$ pertence a t, façamos

$$d_{P,u}=\left|\frac{3\cdot 0-4\cdot 1+20}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|=\frac{16}{5}.$$

Assim, temos $R=\dfrac{8}{5}$. Agora, como o centro é $C(a,0)$, com $a<0$, seguimos com

$$\begin{aligned} d_{C,u} &= \left|\frac{3\cdot a-4\cdot 0+20}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right| \\ \frac{8}{5} &= \left|\frac{3a+20}{5}\right| \\ |3a+20| &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{C,t} &= \left|\frac{3\cdot a-4\cdot 0+4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right| \\ \frac{8}{5} &= \left|\frac{3a+4}{5}\right| \\ |3a+4| &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a+20 &= 8 \\ 3a &= -12 \\ a &= -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a+4 &= 8 \\ 3a &= 4 \\ a &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a+20 &= -8 \\ 3a &= -28 \\ a &= -\frac{28}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a+4 &= -8 \\ 3a &= -12 \\ a &= -4. \end{aligned}$$

E ficamos apenas com $a=-4$. Por fim, a equação procurada éf

$$(x+4)^2+y^2=\left(\frac{8}{5}\right)^2.$$

17. (Adaptado do vestibular da UFU− 2015)
O baricentro pode ser calculado por

$$x_G = \frac{-3+1+5}{3} = 1$$
$$y_G = \frac{0+4+(-4)}{3} = 0.$$

Por fim, como o raio é unitário ($R = 1$), a equação fica

$$(x-1)^2 + (y)^2 = 1^2$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

18. (Adaptado do vestibular da FGV − 2015)
A equação dada é de uma circunferência de centro $(3, 2)$ e raio

$$3^2 + 2^2 - R^2 = 12 \Rightarrow R = 1.$$

Assim, sua ordenada mínima está no ponto $(3, 1)$, e o produto fica $3 \cdot 1 = 3$.

19. (Adaptado do vestibular da UFMA − 2015)
O centro da circunferência é o ponto $C(5, 3)$, e a distância pedida é

$$\begin{aligned} d_{P,C} &= \sqrt{(5-(-2))^2 + (3-3)^2} \\ &= \sqrt{7^2} \\ &= 7. \end{aligned}$$

20. (Adaptado do vestibular da UERN − 2015)
Observe que o centro dessa circunferência é o ponto $C(-2, 3)$ e o seu raio pode ser calculado por

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - R^2 &= -3 \\ (-2)^2 + 3^2 - R^2 &= -3 \\ 4 + 9 - R^2 &= -3 \\ R^2 &= 16 \\ R &= 4 \text{ u.c..} \end{aligned}$$

21. (Extraído do vestibular da UFGD MS − 2014) Os centros de C_1 é $M(-20, 50)$ e C_2 é $N(50, 20)$ e a distância entre M e N é

$$\begin{aligned} D_{M,N} &= \sqrt{(50-(-20))^2 + (20-50)^2} \\ &= \sqrt{70^2 + 30^2} \\ &= 10\sqrt{7^2 + 3^2} \\ &= 10\sqrt{58} \text{ u.c..} \end{aligned}$$

22. (Adaptado do vestibular da FUVEST SP − 2015)
O centro da circunferência é o ponto $C(-1, -\frac{m}{2})$, que substituído na equação da reta fica

$$\begin{aligned} y &= -x + 1 \\ -\frac{m}{2} &= -(-1) + 1 \\ -m &= 4 \\ m &= -4. \end{aligned}$$

Agora, usando a interseção da circunferência com $(-3, 4)$, ficamos com

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 + my = n & \\ n &= (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + (4)^2 + (-4) \cdot 4 \\ n &= 9 - 6 + 16 - 16 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com