

Módulo de Matemática Financeira

Taxas Equivalentes

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Dizemos que i_1 e i_2 são “taxas equivalentes” quando as aplicadas ao mesmo capital num mesmo período de tempo, com diferentes períodos de capitalização, produzem o mesmo montante¹, por exemplo,

- i) Considere a taxa nominal de 10% ao mês quando aplicada por dois meses. Para saber a taxa equivalente a um aumento único bimestral temos suas situações:

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$i = 2 \cdot 0,10$	$(1 + i)^1 = (1 + 0,10)^2$
$i = 0,20$	$i = 1,10 \cdot 1,10 - 1$
$i = 20\%$	$i = 1,21 - 1$
	$i = 0,21 = 21\%$

- ii) Considere a taxa nominal de 20% ao mês, quando aplicada por três meses. Para saber a taxa equivalente a um aumento único trimestral, temos duas situações:

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$i = 3 \cdot 0,20$	$(1 + i)^1 = (1 + 0,20)^3$
$i = 0,60$	$i = 1,20^3 - 1$
$i = 60\%$	$i = 1,728 - 1$
	$i = 0,728 = 72,8\%$

Com base nos exemplos anteriores, faça o que se pede, calculando cada taxa pedida nos regimes de juros simples e compostos.²

- Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?
- Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?
- Qual a taxa quadrimestral equivalente a 72,8% ao ano?
- Qual a taxa mensal equivalente a 46,41% ao quadrimestre?
- Qual a taxa diária equivalente a 8% a mês?

¹Em geral, trabalhado no regime de Juros Compostos.

²Se necessário, use calculadora.

Exercício 2. Um anúncio como “seu cartão de crédito tem juros de 144% ao ano, com capitalização mensal” significa que a taxa usada na operação não é a de 144% ao ano, e sim a taxa mensal que lhe é proporcional, ou seja, $\frac{144\%}{12} = 12\%$ ao mês, com juros compostos e efetivamente a taxa

$$i = (1 + 0,12)^{12} - 1 \cong 289,60\% \text{ ao ano.}$$

Outros exemplos,

- i 40% ao bimestre com capitalização mensal significa 20% ao mês e efetivamente

$$(1,2)^2 - 1 = 1,44 - 1 = 44\% \text{ ao bimestre; ou}$$

- ii 20% ao ano com capitalização trimestral significa 5% ao mês e efetivamente

$$(1,05)^4 - 1 \cong 1,2155 - 1 = 21,55\% \text{ ao bimestre.}$$

Com base no exposto, responda o que se pede.

- Qual a taxa efetiva semestral correspondente a 12% ao semestre com capitalização mensal?
- Qual a taxa efetiva anual correspondente a 16% ao ano com capitalização trimestral?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 3. Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital dela?

Exercício 4. Por um empréstimo de R\$ 80000,00, à taxa de $i\%$ ao mês, paga-se, de uma única vez, após 2 meses, o montante de R\$ 115200,00. Por terem sido aplicados juros compostos, qual a taxa mensal aplicada?

Exercício 5. Um capital quadruplica em 2 meses ao se utilizar de capitalização composta. Qual a taxa mensal aplicada?

Exercício 6. Henrique vai emprestar dinheiro a Mário, por quatro meses e pretende receber juros compostos de 12% ao mês. Como Mário só pretende pagar juros simples, qual a taxa mensal aproximada de juros simples que Henrique deve cobrar para obter o mesmo montante que ele deseja ao final do quarto mês?

Exercício 7. Qual a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 18% ao semestre capitalizados mensalmente?

Exercício 8. Qual a taxa efetiva mensal equivalente em juros compostos à taxa efetiva de 26,53% ao semestre?

Exercício 9. Qual a taxa anual equivalente à taxa composta trimestral de 5%?

Exercício 10. Uma mercadoria teve dois aumentos consecutivos: 8% e 5%. Se o novo preço é R\$ 2268,00, então qual o preço da mercadoria antes dos aumentos?

Exercício 11. Qual é a taxa quadrimestral equivalente a 72,8% a.a. no regime de juros compostos?

Exercício 12. Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

Exercício 13. Qual é o montante líquido de uma aplicação de R\$ 5000,00, com prazo de 4 meses, à taxa de juros compostos de 12% ao ano com capitalização mensal, se for pago imposto de renda, com a alíquota de 10% incidindo sobre os juros, no resgate da aplicação?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Calcule a taxa real ao fim de dezoito meses por um capital aplicado a uma taxa de juros nominal de 36% ao ano com capitalização mensal.

Exercício 15. Qual o valor mais próximo da taxa equivalente à taxa nominal de 24% ao ano com capitalização mensal?

- a) 12,616% ao semestre.
- b) 24% ao ano.
- c) 12% ao semestre.
- d) 4,803% ao bimestre.
- e) 5,75% ao trimestre.

Exercício 16. Se o comprimento de um retângulo é aumentado de 20% e sua largura é aumentada de 50%, de quanto aumenta sua área?

Exercício 17. Sabe-se que 10% de uma certa população está infectada por um vírus. Um teste para identificar a presença do vírus acerta 90% das vezes quando aplicado em uma pessoa infectada, e apresenta 80% de acertos quando aplicado em uma pessoa que não é portadora do vírus.

Qual é a porcentagem de pessoas realmente infectadas entre as pessoas que o teste classificou como infectadas?

Respostas e Soluções.

1. Repetindo o processo exposto nos exemplos, obtemos

a) no período de um ano, ou seja, dois semestres, a seguinte taxa equivalente

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$i = 2 \cdot 0,08$	$(1 + i)^1 = (1 + 0,08)^2$
$i = 0,16$	$i = 1,08 \cdot 1,08 - 1$
$i = 16\%$	$i = 0,1664$
	$i = 16,64\%$.

b) no período de um ano, ou seja, doze meses, a seguinte taxa equivalente

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$i = 12 \cdot 0,005$	$(1 + i)^1 = (1 + 0,005)^{12}$
$i = 0,06$	$i = 1,005^{12} - 1$
$i = 6\%$	$i = 0,1664$
	$i = 16,64\%$.

c) no período de um ano, ou seja, três quadrimestres, a seguinte taxa equivalente

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$0,728 = 3 \cdot i$	
$i = \frac{0,728}{3}$	$(1 + 0,728)^1 = (1 + i)^3$
$i = 0,242666\dots$	$1 + i = \sqrt[3]{1,728}$
$i = 24,2\bar{6}\%$	$i = 1,2 - 1$
	$i = 20\%$.

d) no período de um quadrimestre, ou seja, quatro meses, a seguinte taxa equivalente

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$0,728 = 3 \cdot i$	
$i = \frac{0,728}{3}$	$(1 + 0,4641)^1 = (1 + i)^4$
$i = 0,242666\dots$	$1 + i = \sqrt[4]{1,4641}$
$i = 24,2\bar{6}\%$	$i = 1,1 - 1$
	$i = 10\%$.

e) no período de um mês, ou seja 30 dias, a seguinte taxa equivalente

Regime de juros simples	Regime de juros compostos
$i = \frac{1}{30} \cdot 0,08$	$(1 + 0, i)^{30} = (1 + 0,08)^1$
$i = 0,002666\dots$	$1 + i = \sqrt[30]{1,08}$
$i = 0,2\bar{6}\%$	$i \cong 0,257\%$.

2. Aplicando o exposto no enunciado, teremos que

a) 12% ao semestre com capitalização mensal é o mesmo que $\frac{12\%}{6} = 2\%$ a.m., o que garante ao semestre juros de

$$(1 + 0,02)^6 - 1 = 1,02^6 - 1 \cong 12,62\% \text{ a.s..}$$

b) 16% ao ano com capitalização trimestral é o mesmo que $\frac{16\%}{4} = 4\%$ a.t., o que garante ao ano juros de

$$(1 + 0,04)^4 - 1 = 1,04^4 - 1 \cong 16,9\% \text{ a.a..}$$

3. (Adaptado do material do PROFMAT)

A taxa nominal é de 6% ao ano com capitalização mensal corresponde a taxa de $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$ ao mês e equivale a taxa efetiva de

$$(1 + 0,005)^{12} - 1 \cong 1,0617 - 1 = 6,17\% \text{ ao ano.}$$

4. Como se trata de juros compostos com $C = 80000$, $M = 115200$, $n = 2$ e $i = ?$, ficaremos com

$$\begin{aligned} M &= C(1 + i)^n \\ 115200 &= 80000(1 + i)^2 \\ (1 + i)^2 &= \frac{115200}{80000} \\ (1 + i)^2 &= \frac{1152}{800} \\ (1 + i)^2 &= \frac{144}{100} \\ 1 + i &= \sqrt{\frac{144}{100}} \\ 1 + i &= \frac{12}{10} \\ 1 + i &= 1,2 \\ i &= 0,2 = 20\% \text{ a.m..} \end{aligned}$$

5. Com base no enunciado, podemos escrever que $C = x$, $M = 4x$, $i = ?\% \text{ a.m.}$ e $n = 2$ meses. E aplicando a fórmula ficaremos com

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 4x &= x \cdot (1+i)^2 \\ \frac{4x}{x} &= (1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= 4 \\ 1+i &= \sqrt{4} \\ i &= 1 = 100\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

6. (Adaptado do material do PROFMAT)

O montante a juros compostos ao final do 4º mês será

$$M = C(1 + 0,12)^4 = C \cdot (1,12)^4.$$

Agora, buscamos a taxa i a.m. nos juros simples que renderá mesmo M . Sendo assim, devemos escrever

$$\begin{aligned} M &= C + C \cdot i \cdot n \\ C \cdot (1,12)^4 &= C + C \cdot i \cdot 4 \\ (1,12)^4 &= 1 + 4i \\ 1,57351936 &= 1 + 4i \\ 4i &= 0,57351936 \\ i &= 0,14337984 \cong 14,34\%. \end{aligned}$$

7. (Adaptado do concurso do TCE (RS) – 2011)

A taxa nominal 18% a.s. deve ser calculada por capitalização mensal como

$$\frac{0,18}{6} = 0,03 \text{ a.m.}$$

A taxa efetiva anual será

$$\begin{aligned} (1 + 0,03)^{12} - 1 &= \\ 1,03^{12} - 1 &\cong 1,4258 - 1 \\ &= 42,58\% \text{ a.a.} \end{aligned}$$

8. (Adaptado do concurso do TCE (RS) – 2011)

A taxa efetiva mensal será

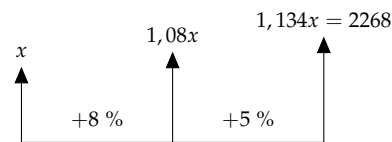
$$\begin{aligned} (1+i)^6 &= 1 + 0,2653 \\ 1+i &= \sqrt[6]{1,2653} \\ i &= 1,039997 - 1 \\ i &= 0,039997 \cong 0,04 = 4\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

9. (Adaptado do concurso da Transpetro – 2011)

A taxa efetiva anual (quatro trimestres) será

$$\begin{aligned} (1 + 0,5)^4 &= 1 + i \\ 1 + i &= 1,21550625 \\ i &= 1,2155 - 1 \\ i &= 0,2155 = 21,55\% \text{ a.a.} \end{aligned}$$

10. Como foram dois aumentos distintos, devemos fazer a aplicação, passo a passo, dos fatores 1,08 e 1,05. O que resulta num aumento acumulado de $1,08 \cdot 1,05 = 1,134$. Portanto, o valor inicial x se tornará $1,134x$ depois dos dois aumentos. Por fim, $1,134x = 2268$ e $x = \frac{2268}{1,134} = 2000$ reais. Graficamente a situação pode ser representada por:



11. (Adaptado do concurso do Banrisul)

Num ano há 3 quadrimestres, sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} (1+i)^3 &= 1 + 0,728 \\ 1+i &= \sqrt[3]{1,728} \\ i &= 1,2 - 1 = 20\% \text{ a.q.} \end{aligned}$$

12. (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)

Com as reduções de 50%, 40% e 10%, tem-se respectivamente os fatores de variação de

$$(1 - 0,5) = 0,5, (1 - 0,4) = 0,6 \text{ e } (1 - 0,1) = 0,9.$$

O fator acumulado foi

$$0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,27.$$

Por fim, fica-se com 0,27, logo reduziu-se 0,73.

13. A partir da taxa nominal de 12% a.a., podemos chegar a taxa mensal efetiva de $\frac{12\%}{12} = 1\%$ ao mês. Assim, o montante ao final do prazo de 4 meses será

$$M = 5000 \cdot (1 + 0,01)^4 \cong 5203,02.$$

Os juros serão de 203,02 reais e com desconto de 10% acabam em

$$90\% \cdot 203,02 = 182,72,$$

e o resgate da aplicação será de R\$ 5182,72.

14. (Adaptado do concurso para Auditor Fiscal da Previdência Social)

A taxa nominal de 36% a.a com capitalização mensal é a taxa mensal efetiva de $\frac{0,36}{12} = 0,03$. Sendo assim, ao final de 18 meses, a taxa real será de

$$(1 + 0,03)^{18} - 1 \cong 0,70 = 70\%.$$

15. (Adaptado do concurso da CVM)

A taxa nominal de 24% a.a com capitalização mensal é a taxa mensal efetiva de $\frac{0,24}{12} = 0,02$. Sendo assim, temos

- a) $(1 + 0,02)^6 = 1,02^6 \cong 1,12616$, ou seja, $i = 12,616$ a.s..
- b) $(1 + 0,02)^{12} = 1,02^{12} \cong 1,2682$, ou seja, $i = 26,82$ a.a..
- c) $(1 + 0,02)^6 \cong 1,12616$, ou seja, $i = 12,616$ a.s..
- d) $(1 + 0,02)^2 = 1,02^2 = 1,0404$, ou seja, $i = 4,04$ a.b..
- e) $(1 + 0,02)^3 = 1,02^3 = 1,061208$, ou seja, $i = 6,1208$ a.t..

Portanto, a resposta é letra “a”.

16. (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sendo c o comprimento e l a largura, a área inicial é $S = cl$. Como c aumentou $i_1 = 0,20$, logo seu novo valor é $1,2$ e l aumentou $i_2 = 0,5$, passando a valer $1,5l$. Então a área S' fica:

$$\begin{aligned} S' &= 1,2c \cdot 1,5l \\ &= 1,2c \cdot 1,5l \\ &= 1,8S. \end{aligned}$$

Portanto, houve aumento de 80% na área.

17. (Extraído do PAPMEM 2014.2)

Suponha que a população seja de 1000 pessoas. Das quais 100 estão infectadas. Dentre essas, o teste acerta 90% das vezes, portanto o teste identificou 90 pessoas com o vírus (e de fato elas o têm). No grupo das que não estão doentes, 20% são falsos positivos, portanto $0,20 \cdot 900 = 180$ estão sadias mas com teste positivo. Daí, as pessoas que o teste identificou com infectadas foram $90 + 180 = 270$ e as que estão com o vírus (pelo teste) foram 90. Por fim, o percentual fica em $\frac{90}{270} = \frac{1}{3} \cong 33,33\%$.