Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos

Divisão de Funções Polinomiais

3° **ano E.M.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos
Divisão de Funções Polinomiais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Dividindo-se um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x + 1$ obtém-se quociente $x + 1$ e resto também $x + 1$. Sendo assim $P(3)$ é:

a) 2.

b) 12.

c) 22.

d) 32.

e) 42.

Exercício 2. Dividindo-se um polinômio de grau 5 por um polinômio de grau 2, o grau do quociente é, necessariamente:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Exercício 3. Qual o valor de m para que a divisão de $x^3 - 2$ por $x^2 - x + m$ tenha quociente $x + 1$ e resto $x - 2$.

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Exercício 4. Determine o quociente e o resto na divisão de $x^4 - 2x^2 + 3x + 4$ por $R(x) = x^2 + 5x - 2$.

Exercício 5. Dividindo-se $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ por $D(x) = ax^2 + bx + c$, obtém-se quociente $Q(x) = x - 3$ e resto $R(x) = x + 1$. O valor de $a + b + c$ é:

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Exercício 6. Qual o resto da divisão de $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$ por $x^2 - 1$, sendo $x^2 + 2x - 1$ o quociente?

a) $x - 1$.

b) $x - 2$.

c) $x - 3$.

d) $x - 4$.

e) $x - 5$.

Exercício 7. Qual o quociente na divisão de $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ por $x^3 + x^2 + x + 1$?

a) x^2.

b) $x^2 + x + 1$.

c) $x^2 + 2x + 2$.

d) $x^2 + 3x + 3$.

e) $x^2 + 4x + 4$.

Exercício 8. Dividindo-se $x^5 + 1$ por $x^3 - 2x$, obtém-se quociente $x^2 + x - 2$ e resto $R(x)$. Qual o valor de $R(2)$?

a) 15.

b) 16.

c) 17.

d) 28.

e) 28.

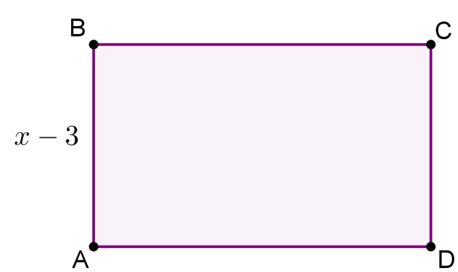
2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Na figura abaixo, a área do retângulo é $x^2 - 4x + 3$. Determine:

a) A medida da sua base AD.

b) A medida da sua diagonal AC.

c) O volume de um cilindro obtido pela rotação, na qual seu eixo de rotação é o lado AB.



Exercício 10. Dividindo-se um polinômio de grau 8 por um polinômio de grau 4, obtém-se um quociente de grau m e um resto de grau n. Os valores de m e n são:

a) $m = 4$ e $n = 3$.

b) $m \leq 4$e $n \leq 3$.

c) $m = 4$ e $n \leq 3$.

d) $m \geq 4$ e $n = 3$.

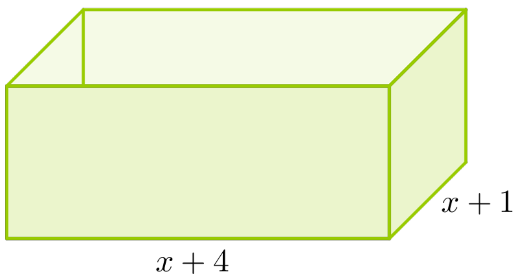
e) $m = 4$ e $n \geq 3$.

Exercício 11. Determine a e b reais, de modo que $-2x^3 + ax^2 + b$ seja divisível por $x^2 + x + 1$.

Exercício 12. Determine o quociente e o resto na divisão de $p(x) = -x^3 - 4x^2 + 3$ por $d(x) = x^2 - 2x$.

Exercício 13. Os polinômios $p(x) = x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 77x + 8mn + 4$ e $q(x) = x^3 - 13x + 12$ são divisíveis pelo polinômio $h(x) = x^2 + 3x + m$. Qual é o valor de $m - n$?

Exercício 14. Na figura, o volume do paralelepípedo é $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$. Determine sua altura.



Exercício 15. Dividindo-se o polinômio $p(x) = x^2 + (-1 + i)x + k$ por $h(x) = x - 1$, obtém-se quociente $q(x) = x + i$ e resto $r(x) = 2i$. Determine k.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Qual é o polinômio que ao ser multiplicado por $g(x) = x^2 + 1$ tem como resultado o polinômio $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$?

a) $x^2 + x$.

b) $x^2 - x$.

c) $3x^2 + x$.

d) $3x^2 + 2x$.

e) $3x^2 - x$.

Exercício 17. Se o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^2 + mx + p$ é divisível por $D(x) = x^2 + 1$, o valor de $m - p$ é:

a) -3.

b) -1.

c) 0.

d) 2.

e) 3.

Exercício 18. O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 3ax - 4a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - x - 4$. Qual é o valor de a?

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Exercício 19. O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x + 3$ são, respectivamente:

a) $x - 2$ e 5.

b) $x + 2$ e 6.

c) $x - 3$ e 2.

d) $x + 1$ e 0.

e) $x - 1$ e -2.

Exercício 20. Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, então, $n + m$ é igual a:

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Temos que $P(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1) + (x + 1)$, segue que $P(3) = (3^2 - 3 + 1)(3 + 1) + (3 + 1) = 7 \cdot 4 + 4 = 32$. Resposta D.

2. O grau do quociente é $5 - 2 = 3$. Resposta D.

3. Temos que:

$$\begin{aligned} x^3 - 2 &= (x^2 - x + m)(x + 1) + (x - 2) \\ x^3 - 2 &= x^3 + x^2 - x^2 - x + mx + m + x - 2 \\ x^3 - 2 &= x^3 + mx + m - 2 \end{aligned}$$

Temos, portanto, que $m = 0$. Resposta C.

4. Temos:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +3x & +4 & x^2 & +5x & -2 \\ \cline{6-8} -x^4 & -5x^3 & +2x^2 & & & x^2 & -5x & +25 \\ \cline{1-5} & -5x^3 & +0x^2 & +3x & +4 & & & \\ & +5x^3 & +25x^2 & -10x & & & & \\ \cline{2-5} & & +25x^2 & -7x & +4 & & & \\ & & -25x^2 & -125x & +50 & & & \\ \cline{3-5} & & & -132x & +54 & & & \end{array}$$

Portanto, o quociente é $x^2 - 5x + 25$ e o resto é $-132x + 54$.

5. Sabemos que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Se queremos $a + b + c$, basta encontrarmos $D(1)$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ P(1) &= D(1) \cdot Q(1) + R(1) \\ 1^3 - 1^2 + 1 - 1 &= (a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c)(1 - 3) + (1 + 1) \\ 0 &= (a + b + c) \cdot (-2) + 2 \\ -2 &= (a + b + c) \cdot (-2) \\ a + b + c &= 1. \end{aligned}$$

Resposta D.

6. Se o resto é $R(x)$, então temos:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1 &= (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 1) + R(x) \\ x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1 &= x^4 + 2x^3 - x^2 - x^2 - 2x + 1 + R(x) \\ x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1 &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + R(x) \\ R(x) &= 2x. \end{aligned}$$

7. Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr} x^5 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +1 & x^3 & +x^2 & +x & +1 \\ \cline{7-10} -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2 & & & \\ \cline{1-6} & & & & x & +1 & & & & \end{array}$$

Resposta A.

8. Sejam $P(x)$, $Q(x)$ e $D(x)$, respectivamente, o dividendo, o quociente e o divisor. Como queremos $R(2)$, temos:

$$\begin{aligned} P(2) &= D(2) \cdot Q(2) + R(2) \\ 2^5 + 1 &= (2^3 - 2 \cdot 2)(2^2 + 2 - 2) + R(2) \\ 31 &= 4 \cdot 4 + R(2) \\ R(2) &= 15. \end{aligned}$$

Resposta A.

9.

a) Para encontrarmos a medida da base, basta dividirmos o valor da área pela medida da altura:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} x^2 & - & 4x & + & 3 & x & - & 3 \\ \cline{6-8} -x^2 & + & 3x & & & x & - & 1 \\ \cline{1-5} & & -x & + & 3 & & & \\ & & +x & - & 3 & & & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & & & \end{array}$$

Portanto, $AD = x - 1$.

b) Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= (x - 3)^2 + (x - 1)^2 \\ AC^2 &= x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 \\ AC^2 &= 2x^2 - 8x + 10 \\ AC &= \sqrt{2x^2 - 8x + 10}. \end{aligned}$$

c) O cilindro terá altura igual à medida de AB e raio da base igual a AD, ou seja:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot AD^2 \cdot AB \\ &= \pi \cdot (x - 1)^2 (x - 3) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x - 3)\pi \\ &= (x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\pi. \end{aligned}$$

10. C.

11. Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-2x^3 & +ax^2 & +0x & +b & x^2 \quad +x \quad +1 \\ \cline{5-5}
2x^3 & +2x^2 & +2x & & -2x \ +(2+a) \\ \cline{1-4}
& (2+a)x^2 & +2x & +b & \\
& -(2+a)x^2 & -(2+a)x & -(2+a) & \\ \cline{2-4}
& & -ax & -2-a+b &
\end{array}$$

Chegamos ao resto $-ax+(-2-a+b)$, que deve ser zero, ou seja, cada um dos seus termos deve ser igual a zero, segue que $a=0$ e $b=2$.

12. (Extraído da Vídeo Aula) Temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & -4x^2 & +0x & +3 & x^2 \quad -2x \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & -x \quad -6 \\ \cline{1-4}
& -6x^2 & +0x & +3 & \\
& 6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-4}
& & 12x & +3 &
\end{array}$$

Portanto, o quociente é $-x-6$ e o resto $12x+3$.

13. Fazendo a divisão de $q(x)$ por $h(x)$, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +0x^2 & -13x & +12 & x^2 \quad +3x \quad +m \\ \cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & -mx & & x \quad -3 \\ \cline{1-4}
& -3x^2 & -(m+13)x & +12 & \\
& 3x^2 & +9x & +3m & \\ \cline{2-4}
& & -(m+4)x & +3m+12 &
\end{array}$$

Como o resto deve ser zero, temos $m=-4$. Agora, faremos $p(x)$ dividido por $h(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & -13x^2 & +77x & -32n+4 & x^2 \quad +3x \quad -4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +4x^2 & & & x^2 \quad -8x \quad +15 \\ \cline{1-5}
& -8x^3 & -9x^2 & +77x & -32n+4 & \\
& +8x^3 & +24x^2 & -32x & & \\ \cline{2-5}
& & 15x^2 & +45x & -32n+4 & \\
& & -15x^2 & -45x & +60 & \\ \cline{3-5}
& & & & -32n+64 &
\end{array}$$

Como o resto deve ser zero, temos $n=2$. Por fim, chegamos a $m-n=-4-2=-6$.

14. A área da base do paralelepípedo é $(x+4)(x+1) = x^2+5x+4$. Para determinarmos a altura, basta dividirmos o volume pela área da base. Assim:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & -11x & -12 & x^2 \quad +5x \quad +4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -5x^2 & -4x & & x \quad -3 \\ \cline{1-4}
& -3x^2 & -15x & -12 & \\
& +3x^2 & +15x & +12 & \\ \cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Portanto, a altura do paralelepípedo é $x-3$.

15. Temos, então:

$$\begin{aligned}
p(x) &= h(x)\cdot q(x) + r(x) \\
x^2+(-1+i)x+k &= (x-1)(x+i)+2i \\
x^2+(-1+i)x+k &= x^2+(-1+i)x-i+2i \\
k &= i.
\end{aligned}$$

16. Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +0 & x^2 \quad +1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +0x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad +x \\ \cline{1-5}
& x^3 & +0x^2 & +x & +0 & \\
& -x^3 & & -x & & \\ \cline{2-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

Portanto, o outro fator de $h(x)$ é x^2+x. Resposta A.

17. (Extraído da UPF-RS-2015) Vamos fazer a divisão:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +mx & +p & x^2 \quad +1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +0x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad -3 \\ \cline{1-5}
& & -3x^2 & +mx & +p & \\
& & +3x^2 & +0x & +3 & \\ \cline{3-5}
& & & mx & +p+3 &
\end{array}$$

Como o resto deve ser zero, temos $m=0$ e $p+3=0$, segue que $p=-3$. Portanto, $m-p=0-(-3)=3$. Resposta E.

18. (Extraído da UEL - PR) Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -3ax & -4a & x^2 \quad -x \quad -4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & +4x & & x \quad +2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & +(-3a+4)x & -4a & \\
 & -2x^2 & +2x & +8 & \\ \cline{2-4}
 & & (-3a+6)x & -4a+8 &
\end{array}$$

Como o resto deve ser zero, então $a = 2$. Resposta E.

19. (Extraído da ESPM - SP - 2016) Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +x & -1 & x \quad +3 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -3x & & x \quad -2 \\ \cline{1-3}
 & -2x & -1 & \\
 & +2x & +6 & \\ \cline{2-3}
 & & 5 &
\end{array}$$

Resposta A.

20. (Extraído da FGV - 2015) Fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
mx^3 & +nx^2 & +0x & +1 & x^2 \quad -x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-mx^3 & +mx^2 & +mx & & mx+(m+n) \\ \cline{1-4}
 & (m+n)x^2 & +mx & +1 & \\
 & -(m+n)x^2 & +(m+n)x & +(m+n) & \\ \cline{2-4}
 & & (2m+n)x & +m+n+1 &
\end{array}$$

Como o resto deve ser zero, então $m+n+1 = 0$, donde $m+n = -1$. Resposta B.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com