Módulo Geometria Espacial II - volumes e áreas de prismas e pirâmides

Volumes de sólidos semelhantes.

3° **ano/E.M.**

Volumes de sólidos semelhantes.
Geometria Espacial II - volumes e áreas de prismas e pirâmides.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o volume de uma pirâmide A, sabendo que é semelhante a uma pirâmide B, de volume $10cm^3$, e que tem altura que mede a metade da altura da pirâmide A.

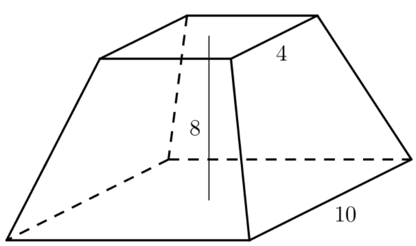
Exercício 2. Uma pirâmide tem $8cm$ de altura e $200cm^3$ de volume. Paralelo à sua base e a $2cm$ de seu vértice, traça-se um plano que a divide em uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide. Qual o volume dessa pirâmide menor?

Exercício 3. Por um cubo de $32cm^3$ de volume, passam três planos secantes, entre si, pelo centro do cubo e paralelos a duas faces do cubo, gerando outros cubos idênticos. Determine o volume de um desses cubos.

Exercício 4. Determine o volume de um tronco de pirâmide que se obtém ao seccionar, paralelamente à base, uma pirâmide de de $10cm$ de altura e $600cm^3$ de volume, sendo essa secção feita no ponto médio da altura.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Determine o volume do tronco de pirâmide quadrangular regular da figura.



Exercício 6. Em uma pirâmide de base quadrada de $10cm$ de altura, traça-se uma seção paralela à base que dista $4cm$ do vértice da pirâmide. Qual a razão entre a área da seção e a área da base da pirâmide?

Exercício 7. Determine o apótema de um tronco de pirâmide regular cujas bases são triângulos equiláteros de lados $8cm$ e $12cm$ e a área lateral do tronco é $180cm^2$.

Exercício 8. O volume de um tronco de pirâmide regular é $109cm^3$. Suas bases são triângulos equiláteros de $5cm$ e de $7cm$ de lado. Calcule sua altura.

Exercício 9. Qual o volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal, de aresta lateral $5m$, cujas áreas das bases medem $54\sqrt{3}m^2$ e $6\sqrt{3}m^2$?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Cortando-se uma pirâmide de $30dm$ de altura por um plano paralelo à base e distante $24dm$ do vértice, obtém-se uma seção cuja área mede $144dm^2$. A medida da área da base de tal pirâmide, em dm^2, é:

a) 180.

b) 200.

c) 212.

d) 225.

e) 288.

Exercício 11. Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a $20cm$. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a $5cm$. Determine o volume do tronco de pirâmide formado.

Exercício 12. Determine o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular que tem aresta da base maior medindo B, aresta da base menor medindo b e altura medindo h.

Respostas e Soluções.

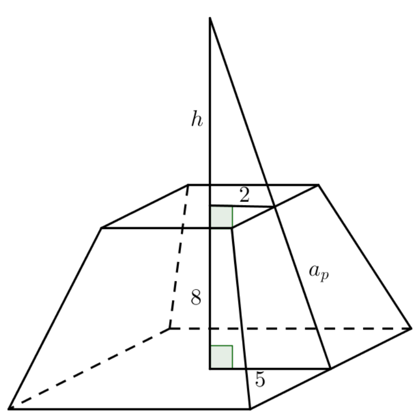
1. Como a razão de semelhança é 2, temos $\dfrac{V_A}{V_B} = 2^3$, segue que $V_A = 10 \cdot 8 = 80cm^3$.

2. Ao passar um plano paralelo à base, a pirâmide gerada (2) é semelhante à primeira (1). Temos então $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{8}{2}\right)^3 = 64$, segue que $V_2 = \dfrac{V_1}{64} = \dfrac{25}{8}cm^3$.

3. Como os planos passam pelo centro e são paralelos às faces, os cubos gerados (2) são semelhantes ao cubo inicial (1), além de terem aresta medindo a metade da medida das arestas do cubo (1). Temos então $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{a}{\frac{a}{2}}\right)^3 = 8$, segue que o volume dos cubos menores é $V_2 = \dfrac{32}{8} = 4cm^3$.

4. Como o volume do tronco é a diferença entre a pirâmide inicial (1) e a pirâmide gerada pela secção (2), que são semelhantes, inclusive, temos, $\dfrac{V_1}{V_2} = (\dfrac{10}{5})^3 = 8$, segue que $V_2 = \dfrac{600}{8} = 75cm^3$. Assim, o volume do tronco é $600 - 75 = 525cm^3$.

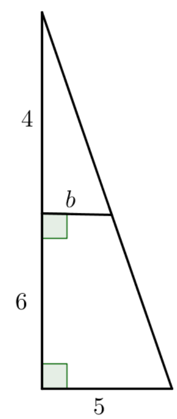
5. Inicialmente vamos "reconstruir"a pirâmide que deu origem ao tronco, observando a figura abaixo.



Da relação de semelhança dos triângulos formados pelas alturas, apótemas das bases e apótemas das pirâmides, temos $\dfrac{h+8}{5} = \dfrac{h}{2}$, segue que $h = \dfrac{16}{3}$. Para calcular o volume do tronco V, basta fazer a diferença entre os volumes das pirâmides, como segue:

$$\begin{array}{rcl} V & = & \dfrac{10^2 \cdot \frac{40}{3}}{3} - \dfrac{4^2 \cdot \frac{16}{3}}{3} \\ V & - & \dfrac{4000}{9} - \dfrac{256}{9} \\ V & = & \dfrac{3744}{9} \\ V & = & 416. \end{array}$$

6. Vamos observar os triângulos semelhantes formados pelas alturas, apótemas das bases e apótemas das pirâmides formadas pela seção.



Aplicando a razão de semelhança nos triângulos, temos $\dfrac{4}{b} = \dfrac{10}{5}$, segue que $b = 2cm$. Assim, a razão entre a área da seção e da pirâmide é $\dfrac{8^2}{10^2} = \dfrac{16}{25}$.

7. A área lateral do tronco é formada por 3 trapézios de bases medindo $8cm$ e $12cm$ e altura igual ao apótema x do tronco. Temos então:

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot \dfrac{(8+12)x}{2} & = & 180 \\ 20x & = & 120 \\ x & = & 6. \end{array}$$

Assim, o apótema do tronco mede $6cm$.

8. Vamos chamar de V o volume da pirâmide que deu origem ao tronco e v o volume da pirâmide menor na obtenção do tronco. Como as pirâmides são semelhantes, temos $\dfrac{V}{v} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^3$. Como o volume do tronco é $109cm^3$, então $V - v = 109$, que, substituindo na equação anterior, chegamos a $\dfrac{v+109}{v} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^3$, segue que $v = \dfrac{125}{2}cm^3$. Como a base menor do tronco tem $5cm$ de medida de lado, temos que sua área é $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}cm^2$. Tomando por h a altura da pirâmide menor, temos $\frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{125}{2}$, segue que $h = 10\sqrt{3}cm$. Usando a razão de semelhança entre alturas e arestas das bases, obtemos $\frac{10\sqrt{3}}{5} = \frac{x + 10\sqrt{3}}{7}$, donde $x = 4\sqrt{3}cm$, que é a medida da altura do tronco.

9. Usando a relação de semelhança das pirâmides que deram origem ao tronco, sendo suas arestas laterais de medidas a e $a + 5$ metros, temos:

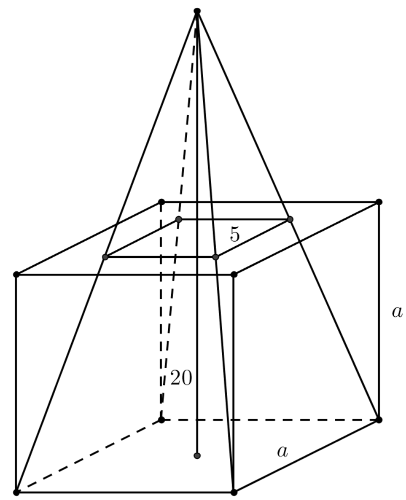
$$\begin{aligned} \left(\frac{5+a}{a}\right)^2 &= \frac{54\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \\ \frac{5+a}{a} &= 3 \\ 5+a &= 3a \\ a &= \frac{5}{2}m. \end{aligned}$$

Agora, para o cálculo do volume V do tronco, basta subtrairmos os volumes das pirâmides que deram origem a ele, como segue:

$$\begin{aligned} V &= \frac{54\sqrt{3}(5+\frac{5}{2})}{3} - \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{5}{2}}{3} \\ &= \frac{54\sqrt{3}\cdot 15}{6} - \frac{30\sqrt{3}}{6} \\ &= 130\sqrt{3}cm^3. \end{aligned}$$

10. (Extraído da Unicamp) Usando a razão de semelhança, temos $\frac{144}{A} = (\frac{24}{30})^2$, ou seja, $A = \frac{144 \cdot 25}{16} = 225dm^2$. Resposta D.

11. (Extraído da Unicamp - adaptado) Vamos chamar a medida da altura do tronco de pirâmide que é igual à medida da aresta do cubo de a. Usando a razão de semelhança entre arestas das bases e alturas das pirâmides, temos $\frac{20-a}{5} = \frac{20}{a}$, ou seja, $a = 10cm$. Temos então que o volume do tronco é $V = \frac{10^2 \cdot 20}{3} - \frac{5^2 \cdot 10}{3} = \frac{2000-250}{3} = \frac{1750}{3}dm^3$.



12. Chamando de H a medida da altura da pirâmide que originou o tronco e aplicando a razão de semelhança com as alturas e arestas das bases das pirâmides, temos $\frac{H-h}{b} = \frac{H}{B}$, segue que $H = \frac{Bh}{B-b}$. Vamos agora calcular o volume V do tronco subtraindo o volume das pirâmides:

$$\begin{aligned} V &= \frac{B^2 \cdot \frac{Bh}{B-b}}{3} - \frac{b^2 \cdot \frac{bh}{B-b}}{3} \\ &= \frac{(B^3 - b^3)h}{3(B-b)} \\ &= \frac{h(B^2 + Bb + b^2)}{3}. \end{aligned}$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com