Problemas dos Círculos Matemáticos

Problemas extras para os capítulos 0 e 1

Introdução

Problemas dos Círculos Matemáticos - Capítulos 0 e 1
Introdução

1 Exercícios Introdutórios

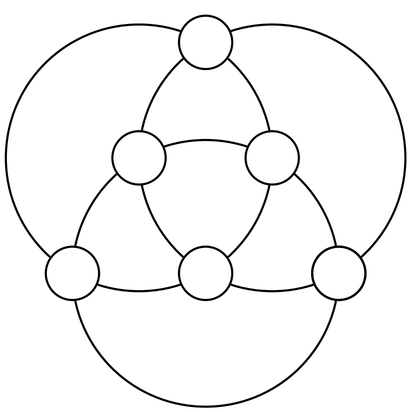
Exercício 1. A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto é 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

Exercício 2. Em cada uma das situações abaixo, decida se é possível dispormos os números $1, 2, \ldots, 15$ nos quadradinhos de um tabuleiro 3×5 de modo que:

a) A soma dos números nas três linhas sejam iguais entre si e a soma dos números nas três colunas também sejam iguais entre si, mas, eventualmente, diferentes do valor das somas das linhas.

b) A soma dos números em todas as linhas e colunas sejam iguais entre si.

Exercício 3. Na figura abaixo, três circunferências de mesmo raio se intersectam em seis pontos. Em cada um destes pontos, existe um círculo menor, todos de mesmo raio. Coloque os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos círculos pequenos, de modo que os números escritos em cada uma das circunferências maiores seja 14.



Exercício 4. João possui 30 barras de chocolate com os pesos: 2, 3 ou 4 quilos. A soma dos pesos das barras é 100 quilos. João possui mais barras de $2\,kg$ ou de $4\,kg$?

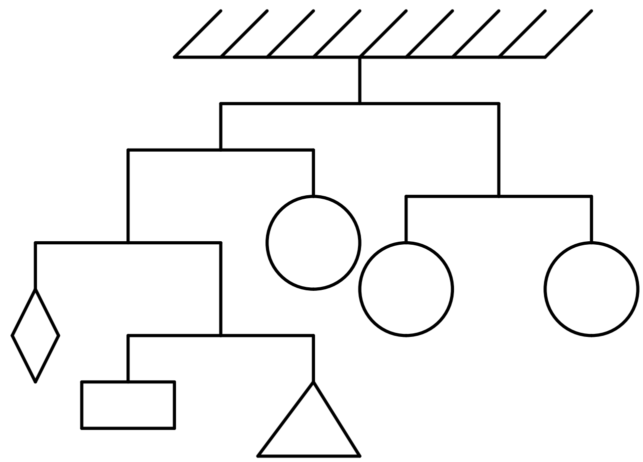
Exercício 5. A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto é 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Um barco motorizado solta uma boia em um rio de margens retilíneas e paralelas às 10:00 e começa a navegar, na direção determinada pelo rio, contra a correnteza até às 10:15. Depois disto, ele retorna, também na direção determinada pelo rio. Em que instante o barco encontrará novamente a boia?

Exercício 7. A figura representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa $40g$, quanto pesa o retângulo?

Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.



Exercício 8. Na oficina do Zé, existem seis pedaços de correntes com as seguintes quantidades de elos: 10, 10, 8, 8, 5 e 2. Ele precisa unir estes pedaços para formar uma corrente circular. Ele gasta 1 minuto para cortar um elo e 2 minutos para uni-lo, perfazendo um total de 3 minutos por elo. Se ele cortar um elo ao final de cada peça separada, unindo as peças uma de cada vez, ele demoraria $6 \cdot 3 = 18$ minutos. Entretanto, como ele está com pressa, ele pretende realizar esta operação de uma forma mais rápida.

a) Diga como ele pode formar a corrente circular gastando apenas 15 minutos.

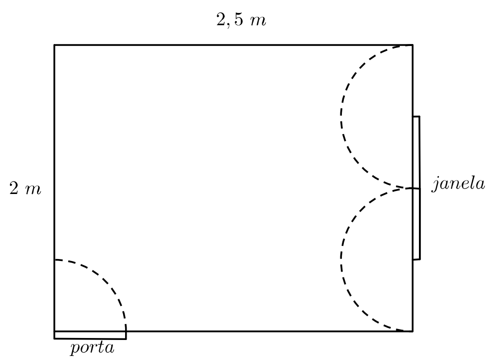
b) É possível ele fazer tal operação em menos de 15 minutos?

Exercício 9. Um jogo comum de dominó é composto por 28 peças. Cada peça é formada por dois números inteiros que variam de 0 a 6, inclusive. Todas as possibilidades de combinações possíveis (a, b), com $a \leq b$, são listadas exatamente uma vez. Note que a peça $(4, 2)$ é listada como a peça $(2, 4)$, pois $2 \leq 4$. Excluindo a peça $(0, 0)$, para cada uma das outras 27 peças (a, b), com $a \leq b$, escrevemos num quadro a fração $\frac{a}{b}$.

a) Quantos valores distintos estão escritos nas formas de frações no quadro? (Veja que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ têm o mesmo valor e devem ser contadas apenas uma vez.)

b) Qual a soma dos valores distintos encontrados no item anterior?

Exercício 10. Pedro acabou de se mudar para sua nova casa e ganhou um novo quarto. A figura a seguir mostra uma vista superior simplificada de seu novo quarto que possui 2m de largura por $2,5$m de comprimento.



A porta indicada na figura tem 50cm de comprimento e pode ser aberta até encontrar a parede lateral. A janela é dividida em duas portas de mesmo comprimento que quando abertas encostam nas paredes vizinhas. Os arcos da figura mostram as aberturas da porta e da janela. A mãe de Pedro disse que ele deve colocar seus móveis no quarto de modo que não fiquem nos caminhos de abertura da porta nem da janela. Quantos metros quadrados Pedro tem em seu quarto para colocar os seus móveis?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Uma fração irredutível é uma fração onde o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum. Por exemplo, $\dfrac{11}{7}$ é irredutível enquanto que $\dfrac{12}{14}$ não é pois ainda podemos reduzi-la efetuando o cancelamento do número 2:

$$\frac{12}{14} = \frac{\cancel{2} \cdot 6}{\cancel{2} \cdot 7} = \frac{6}{7}.$$

Assim, $\dfrac{12}{14}$ é igual a fração irredutível $\dfrac{6}{7}$.

a) Determine uma fração irredutível igual à $\dfrac{111111}{14}$.

b) Determine uma fração irredutível igual à $\dfrac{111111111}{18}$.

c) Determine uma fração irredutível igual à $\dfrac{111\ldots111}{15}$ onde o dígito 1 se repete 2013 vezes no numerador.

d) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual à:

$$\frac{111\ldots111}{2020\ldots0202};$$

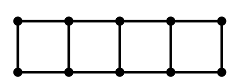
na fração anterior o numerador representa um número com 2014 algarismos iguais a 1 e no denominador existem 1007 algarismos 2 alternados por algarismos 0.

Exercício 12. Dizemos que um número inteiro positivo de três dígitos é *três estrelas* se ele for o resultado do produto de três números primos distintos. Por exemplo, $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ é um número três estrelas, mas $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e $275 = 5 \cdot 5 \cdot 13$ não são números três estrelas, pois o primeiro só possui dois dígitos e o segundo não é o produto de três primos distintos.

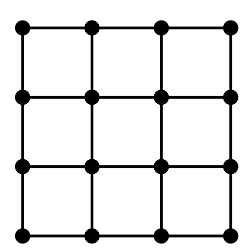
(a) Qual o menor número três estrelas?

(b) Mostre que cada número três estrelas possui algum divisor em comum com 30 maior que 1.

Exercício 13. a) João arranjou 13 palitos no formato de um cercado retangular 1×4 como mostrado na figura abaixo. Cada palito é o lado de um quadradinho 1×1 e no interior de cada um destes quadradinhos ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 4 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?



b) João agora arranjou 24 palitos no formato de um cercado quadrado 4×4 como mostrado na figura abaixo e no interior de cada um destes quadradinhos, ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 9 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?



Respostas e Soluções.

1. Sejam a, b e c as idades dos três filhos de Paulo. Então:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 12 \\ abc &= 30 \end{aligned}$$

Os divisores de 30 são $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Como se tratam de inteiros positivos e a soma deles é 12, segue que $a,b,c \in \{1,2,3,5,6,10\}$. Como o produto é 30, necessariamente um deles deve ser múltiplo de 5. Se um deles é 10, para que o produto seja 30, os outros só podem ser 1 e 3. Isso não satisfaz a condição da soma das idades. Portanto, uma das idades é 5. Portanto, o produto das outras duas é $30/5 = 6$. As únicas possibilidades são 2 e 3 ou 1 e 6. A primeira não é possível em virtuda da condição da soma das idades. Portanto, as três idades são 2, 3 e 5.

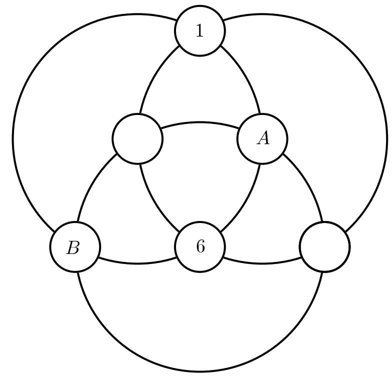
2.

a) Sim, é possível como mostra o exemplo:

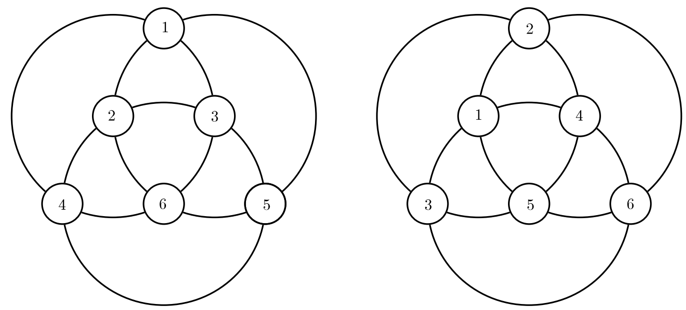
1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

b) Suponha, por absurdo, que é possível fazer tal preenchimento do tabuleiro e seja k o valor comum das somas das linhas e colunas. Como existem 5 colunas, a soma de todos os números do tabuleiro é $5k$. Por outro lado, como temos 3 linhas, a soma de todos os números é $3k$. Isso produz um absurdo $3k = 5k$ apenas quando k é igual a zero.

3. A soma de todos os números dados é $1+2+3+4+5+6 = 21$. Como a soma dos quatro números escritos em cada circunferência maior é 14, a soma dos outros dois números é $21 - 14 = 7$. Os possíveis pares de números com tal soma são: $(3,4)$, $(2,5)$ e $(1,6)$. Fixado um desses pares de soma 7, como exemplificado na figura a seguir com o par $(1,6)$, considerando um dos círculos grandes que passam por eles, podemos concluir que os outros dois números, indicados por A e B neste mesmo círculo, devem somar $14 - 7 = 7$.



Portanto, basta escolhermos um dos pares restantes para as posições A e B e, finalmente, o par que sobrou para outras duas posições. A figura a seguir indica dois possíveis preenchimentos:



4. Sejam x, y e z as quantidades de barras de $2Kg$, $3Kg$ e $4Kg$, respectivamente. Sabemos que:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 30 \\ 2x+3y+4z &= 100. \end{aligned}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por 3 e a subtrairmos da segunda, obteremos

$$z - x = 10$$

Como $z - x > 0$, segue que temos mais barras de $4Kg$ do que barras de $2Kg$.

5. Sejam a, b e c as idades dos três filhos de Paulo. Então:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 12 \\ abc &= 30 \end{aligned}$$

Os divisores de 30 são $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Como se tratam de inteiros positivos e a soma deles é 12, segue que $a,b,c \in \{1,2,3,5,6,10\}$. Como o produto é 30, necessariamente um deles deve ser múltiplo de 5. Se um deles é 10, para que o produto seja 30, os outros só podem ser 1 e 3. Isso não satisfaz a condição da soma das idades. Portanto, uma das idades é 5. Portanto, o produto das outras duas é $30/5 = 6$. As únicas possibilidades são 2 e 3 ou 1 e 6. A primeira não é possível em virtude da condição da soma das idades. Portanto, as três idades são 2, 3 e 5.

6. Como tanto o barco quanto a bóia vão estar sujeitos aos mesmos efeitos da correnteza do rio, para efeitos práticos, podemos considerar apenas a velocidade relativa do barco em relação à bóia e supor que a correnteza é nula. Neste caso, se o barco levou 15 minutos para ir em correnteza parada, ele também levará 15 para voltar e assim ele encontrará a bóia às 10 : 30.

Podemos também resolver o problema analisando o sistema de equações produzido pelas informações do enunciado. Sejam c a velocidade da correnteza e v a velocidade do barco, ambos medidos em quilômetros por hora. Seja ainda x o tempo que leva para o barco encontrar a bóia desde o momento em que ele a solta no rio. Como o barco navega contra a correnteza no primeiro um quarto de hora, a distância que ele percorre é $\frac{v}{4} - \frac{c}{4}$, pois o motor do barco produz o deslocamento de $\frac{v}{4}$ e a correnteza do rio o faz retroceder $\frac{c}{4}$. No movimento de volta, que dura $x - \frac{1}{4}$ horas, o barco percorre, agora no sentido da correnteza, $\left(x - \frac{1}{4}\right) v + \left(x - \frac{1}{4}\right) c$, onde a primeira parcela é a contribuição do motor do barco no deslocamento e a segunda a da correnteza. Durante o movimento de ida e volta do barco, a bóia foi deslocada pela corretenza por uma distância de xc quilômetros, portanto, esse valor corresponde a diferença entre as distâncias de ida e volta:

$$\begin{aligned} \frac{v}{4} - \frac{c}{4} + xc &= \left(x - \frac{1}{4}\right) v + \left(x - \frac{1}{4}\right) c \\ xv &= \frac{v}{2} \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, o barco gastou 1/2 de uma hora, ou seja, 30 minutos, para encontrar a bóia.

7. Seja x o peso do retângulo. Como o retângulo e o triângulo estão em equilíbrio, o peso do triângulo também é x. Analisando o equilíbrio do conjunto que envolve o losango, o retângulo e o triângulo, podemos concluir que o peso do losango é $x + x = 2x$. Como o peso do círculo deve ser igual ao peso do conjunto formado pelo losango, o retângulo e o triângulo, podemos concluir que o seu peso vale $x + x + 2x = 4x$. Finalmente, dado que $4x = 40g$, temos $x = 10g$.

8.

a) Uma maneira dele formar a corrente em 15 minutos é inicialmente abrir todos os elos da do pedaço de 5 elos. Nesse procedimento ele gastará $5 \cdot 1 = 5$ minutos. Em seguinda, ele deve usar cada um desses eles abertos entre os 5 pedaços de correntes restante, usando exatamente um elo para unir dois pedaços distintos. Para esse último procedimento ele gastará $5 \cdot 2 = 10$ minutos.

b) O tempo gasto sempre é um múltiplo de 3 porque uma vez que se gasta 1 minuto para se abrir um elo, é necessário gastarmos 2 minutos para fechá-lo e assim o tempo total por elo alterado é $1 + 2 = 3$ minutos. Como $12 = 3 \cdot 4$ é o maior múltiplo de 3 menor que 15, se fosse possível ele gastar menos de 15 minutos, ele teria que alterar no máximo 4 elos. Como existem 6 pedaços de correntes, pelo menos dois deles não teriam elos alterados. Para unir esses dois pedaços na corrente maior, precisamos de pelo menos 3 elos alterados inseridos em suas extremidades. Assim, poderia usar apenas um elo para conectar os pedaços restantes. Como ele terá pelo menos três pedaços restantes, isso é impossível.

9.

a) Basta começar contando pelos maiores denominadores e não repetir quando aparecerem os menores.

i) Para $b = 6$, temos
$$\left(\frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}\right) = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right)$$

ii) Para $b = 5$, não devemos repetir 0 e nem 1 pois já foram contados, temos
$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

iii) Para $b = 4$, só podemos adicionar frações irredutíveis de denominador 4, pois já contamos as de denominador 1 e 2 quando $b = 6$, temos então
$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

iv) Quando b for 1, 2 ou 3, teremos frações que já foram contadas no caso $b = 6$.

Logo, o número de valores distintos é $7 + 4 + 2 = 13$.

b) Um bom jeito de somarmos as 13 frações é considerarmos suas formas redutíveis vistas no item anterior, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{0}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} &= \frac{21}{6} \\ &= \frac{7}{2}; \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} &= \frac{10}{5} \\ &= 2; \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Então a soma total é $\frac{7}{2} + 2 + 1 = \frac{13}{2}$.

10. Seja L o comprimento de cada porta da janela. Considerando que quando as duas portas abrem elas encostam nas paredes dos lados temos $4 \cdot L = 2$, ou seja, $L = 0,5m$. Chamemos de A a área que Pedro tem para colocar seus móveis. Para determiná-la, basta considerar a área total e subtrair as áreas de aberturas da porta e da janela. Sabendo que a porta abre $\frac{1}{4}$ de circunferência e que as janelas abrem, cada uma, meia circunferência, temos:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot 2,5 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (0,5)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (0,5)^2 \\ &= 5 - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{80 - 5\pi}{16}. \end{aligned}$$

Então Pedro possui $\frac{80-5\pi}{16}$ metros quadrados para colocar seus móveis.

11.

a)

$$\begin{aligned} \frac{111111}{14} &= \frac{\cancel{7} \cdot 15873}{\cancel{7} \cdot 2} \\ &= \frac{15873}{2} \end{aligned}$$

Como 15873 não possui fator 2, a fração é irredutível.

b)

$$\begin{aligned} \frac{111111111}{18} &= \frac{\cancel{9} \cdot 12345679}{\cancel{9} \cdot 2} \\ &= \frac{12345679}{2}. \end{aligned}$$

Como 12345679 não possui fator 2, a fração é irredutível.

c) Como $111 = 3 \cdot 37$, dividindo o numerador em grupos de três dígitos consecutivos, temos:

$$\underbrace{111\ldots111}_{2013 \text{ vezes}} = 3 \cdot \underbrace{37037\ldots037}_{671 \text{ vezes}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{111\ldots111}{15} &= \frac{\cancel{3} \cdot 37037\ldots037}{\cancel{3} \cdot 5} \\ &= \frac{37037\ldots037}{5}. \end{aligned}$$

Como o numerador da fração anterior não é divisível por 5, ela é irredutível.

d) Note que $11 \cdot 1010\ldots0101 = 111\ldots111$ e $2 \cdot 1010\ldots0101 = 2020\ldots0202$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{111\ldots111}{2020\ldots0202} &= \frac{11 \cdot \cancel{1010\ldots0101}}{2 \cdot \cancel{1010\ldots0101}} \\ &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Como $11/2$ é irredutível, a soma desejada é $11 + 2 = 13$.

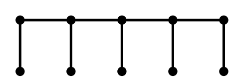
12.

(a) Os dois primeiros números de três dígitos são $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ e $101 = 101$ (que é primo). Ao testar 102, temos $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ que é o menor número três estrelas.

(b) Basta mostrar que todo número três estrelas possui pelo menos um dos fatores primos do conjunto $\{2, 3, 5\}$. Se tomarmos um número três estrelas que não possua pelo menos um desses fatores, ele será pelo menos $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ e, consequentemente, possuirá mais que três dígitos e não será um número três estrelas.

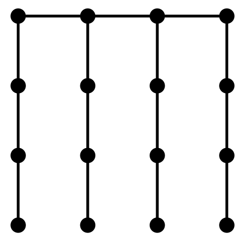
13.

a) É possível libertarmos todas as formigas removendo 4 palitos como indica a figura a seguir.

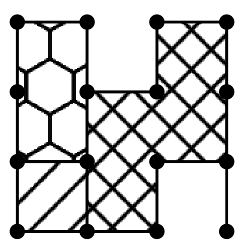


Como cada palito é compartilhado por no máximo dois quadrados e cada quadrado deve possuir pelo menos uma lateral aberta para que a formiga em seu interior possa fugir, para usarmos 3 ou menos palitos, somos obrigados a remover pelo menos um palito do interior que é lateral de dois quadrados. A remoção de um tal palito aglutina o interior de dois quadinhos num compartimento maior e, do ponto de vista prático, transforma o problema de libertar 4 formigas em cercado 1×4 no problema de libertarmos 3 formigas em um cercado 1×3. Se é possível removermos 3 ou menos no cercado $1\times$, também deve ser possível libertarmos a formigas de um 1×3 usando 2 ou menos palitos. Pelo mesmo argumento inicial, isso nos força a remover peo menos um palito interior e assim, o problema é novamente transformado em libertarmos duas formigas em um cercado 1×2 removendo apenas um palito. Isso é claramente impossível tanto removendo o único palito interior ou um palito do bordo de tal cercado. Logo, o mínimo de palitos que devem ser removidos neste caso é 4.

b) É possível libertarmos todas as formigas removendo 9 palitos como indica o exemplo a seguir



Durante a retirada sucessiva de palitos para a libertação das formigas, chamemos em qualquer momento por compartimento qualquer linha poligonal fechada de palitos sem possuir em seu interior uma outra linha poligonal fechada de palitos. Por exemplo, na figura a seguir, onde foram removidos 6 palitos, temos 3 compartimentos indicados por três tipos de preenchimentos distintos. Veja que a remoção de um palito diminui o número de compartimentos em no máximo uma unidade. Portanto, como temos inicialmente 9 coompartimentos e queremos que no final nenhuma formiga fique presa em qualquer tipo de compartimento, devemos remover pelo menos 9 palitos.



Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com