Introdução à Inferência Estatística

Conceitos Básicos

Material elaborado por Letícia Mattos.

Introdução à Inferência Estatística
Conceitos Básicos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um grupo aleatório de mães foi selecionado em um clube com 120 mães para uma pesquisa estatística. Na pesquisa, perguntaram para cada uma das participantes quantos filhos elas tinham. A tabela a seguir mostra o resultado:

Nº de filhos	Nº de mães
1	9
2	6
3+	5

A partir desses dados, qual é a estimativa mais razoável para o número total de mães no clube que possuem menos apenas 1 filho?

Exercício 2. Uma pesquisa foi feita com uma amostra aleatória de 50 assinantes de uma revista de carros. Nessa pesquisa, 15 pessoas responderam que possuem apenas 1 veículo. Sabendo-se que a revista possui 340 assinantes ao todo, qual é a estimativa razoável para o número total de assinantes que possuem apenas 1 veículo?

Exercício 3. Um grupo aleatório de estudantes no IMPA foi selecionado para uma pesquisa sobre esportes. Nessa pesquisa, cada estudante respondeu qual é o seu esporte favorito. A tabela a seguir mostra o resultado.

Esporte	Nº de estudantes
Natação	1
Vôlei	9
Futebol	17
Tênis	13

Sabendo-se que o IMPA possui 528 estudantes, qual é a estimativa razoável para o número total de estudantes cujo esporte preferido seja tênis?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Em uma universidade, uma amostra aleatória de estudantes foi selecionada para uma pesquisa. Nessa pesquisa, perguntou-se a frequência com que os estudantes falavam com os seus pais. Dentre as pessoas entrevistadas, 12% falaram com os seus pais pelo menos uma vez por dia. A margem de erro para essa estimativa é de 3%.
Assinale a alternativa correta.

(a) É razoavelmente confiável dizer que entre 9% e 12% dos estudantes da universidade falam com os pais pelo menos uma vez por dia.

(b) É razoavelmente confiável dizer que entre 9% e 15% dos estudantes da universidade falam com os pais pelo menos uma vez por dia.

(c) É razoavelmente confiável dizer que entre 12% e 15% dos estudantes da universidade falam com os pais pelo menos uma vez por dia.

Exercício 5. Em uma pesquisa recente feita com um grupo aleatório de 600 eleitores em Contagem, 482 foram a favor de aumentar os investimentos em limpeza urbana na cidade. Baseado nessa pesquisa, aproximadamente quantos dos 19.310 eleitores de Contagem são a favor de aumentar os investimentos em limpeza urbana na cidade?

Exercício 6. Considere um grupo de 15 pessoas das quais 5 são brasileiras. Ao se escolher ao acaso 3 pessoas do grupo, sem reposição, qual a probabilidade de exatamente uma das três pessoas escolhidas ser brasileira?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 7. Suponha que e um lote de 100 peças, 10 sejam defeituosas. Escolhendo 5 peças sem reposição, calcule

(a) A probabilidade de não obtermos peças defeituosas

(b) A probabilidade de obtermos pelo menos uma peça defeituosa

Exercício 8. Em uma urna há 200 bolas, dentre as quais 100 pretas e 100 brancas. Selecionamos x bolas aleatoriamente, sem reposição. Calcule o valor de x para que

(a) Com probabilidade 1 exista pelo menos 1 bola preta entre as selecionadas;

(b) Com probabilidade pelo menos 0,9 exista pelo menos 1 bola preta entre as selecionadas.

(c) Compare os resultados dos itens anteriores.

Para o item (b), é aconselhável que você utilize a ajuda de algum sofware como o Geogebra.

Exercício 9. Suponha que um grupo de 23 pessoas seja escolhido aleatoriamente ao acaso. Prove que a probabilidade de que duas pessoas tenham a mesma data de aniversário é de pelo menos 0,5.
É aconselhável que você utilize a ajuda de algum software como o Geogebra para resolver esse exercício.

Respostas e Soluções.

1. Pela tabela, a pesquisa foi feita com $9+6+5=20$ mães. Dentre essas mães, 9 tem apenas 1 filho. Assim, a estimativa mais razoável é que no grupo maior uma fração de $9/20$ mães possuam apenas 1 filho. Isto é, dentre as 120 mães, espera-se que aproximadamente

$$\frac{9}{20}\times 120 = 54$$

mães tenham apenas 1 filho.

2. Na pesquisa feita, a fração dos assinantes que possuem apenas 1 veículo é $15/50$. Assim, a estimativa razoável é que

$$\frac{15}{50}\times 340 = 102$$

assinantes tenham apenas 1 veículo.

3. Pela tabela, a pesquisa foi feita com $1+9+17+13=40$ estudantes. Dentre esses estudantes, 13 preferem tênis. Assim, a estimativa mais razoável é que

$$\frac{13}{40}\times 528 = 171,6$$

estudantes prefiram tênis dentre todos os estudantes. Como esse número não é inteiro, arrendondamos para o inteiro mais próximo. Assim, a resposta é 172.

4. Baseado na estimativa de 12% e da margem de erro de 3%, o intervalo é $12\% \pm 3\%$. Isto é, entre 9% e 15%.

5. Na pesquisa feita, a fração dos eleitores que gostariam de aumentar os investimentos em limpeza urbana em Contagem é $482/600$. Assim, segue que

$$19.310\times\frac{482}{600}\approx 15.512,37$$

eleitores ao todo são a favor de que os investimentos sejam aumentados. Como esse número não é inteiro, arrendondamos para o inteiro mais próximo. Assim, a resposta é 15.512.

6. Como há 15 pessoas, a probabilidade que um dado trio seja escolhido é

$$\frac{1}{\binom{15}{3}}.$$

Agora, devemos responder à seguinte pergunta: quantos trios sao tais que existe apenas 1 brasileiro entre eles? Chamemos os brasileiros de B_1, B_2 e B_3. Se escolhermos o brasileiro B_1 para formar um trio, os outros dois devem ser excluídos. Assim, devemos selecionar 2 pessoas entre as $15-3=12$ restantes. Como há $\binom{12}{2}$ formas de escolhermos as outras 2 pessoas para o trio, concluímos o seguinte. No total, há $3\times\binom{12}{2}$ trios com exatamente 1 brasileiro.

Concluímos que a probabilidade de escolhermos um trio na qual exatamente uma das três pessoas é brasileira é igual a

$$\frac{3\times\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{3\times 6\times 11}{5\times 7\times 13}\approx 0,43.$$

7.

(a) Para obtermos a probabilidade deseja, devemos responder primeiramente a duas perguntas. A primeira é: quantos grupos de 5 peças existem em nosso lote? A resposta é

$$\binom{100}{5}.$$

A segunda pergunta é: quantos grupos de 5 peças não defeituosas temos no nosso lote? Como temos 10 peças defeituosas ao todo, devemos escolher 5 peças dentre as $100-10=90$ peças restantes. Assim, a resposta para essa pergunta é

$$\binom{90}{5}.$$

Uma vez que a probabilidade é dada por (casos possíveis)/(casos totais), concluímos que a probabilidade de não obtermos peças defeituosas é

$$\frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{90\times 89\times 88\times 87\times 86}{100\times 99\times 98\times 97\times 96}.$$

Essa fração é aproximadamente igual a 0,58.

(b) Seja p_0 a probabilidade de nenhuma peça ser defeituosa. Seja p_1 a probabilidade de pelo menos uma peça ser defeituosa. Observe que

$$p_0+p_1=1.$$

Pelo item (a), concluímos que $p_1 = 1-p_0\approx 0,42$.

8.

(a) Para que exista pelo menos 1 bola preta com probabilidade 1, devemos selecionar 101 bolas. Caso contrário, caso selecionemos 100 bolas ou menos, a probabilidade de todas as bolas serem brancas é positiva.

(b) Dado x, a probabilidade de que nenhuma bola preta seja selecionada é igual a

$$\frac{\binom{100}{x}}{\binom{200}{x}}.$$

De fato, o número de conjuntos distintos de x bolas sem nenhuma preta é $\binom{100}{x}$. Por outro lado, o número total de conjuntos de x bolas é $\binom{200}{x}$.

Para que a probabilidade de existir pelo menos 1 bola preta dentre as x seja de pelo menos 0,9, deve valer o seguinte. A probabilidade complementar deve ser de no máximo 0,1. Isto é, a probabilidade de que nenhuma bola preta seja selecionada dentre as x deve ser de no máximo 0,1. Assim, devemos ter

$$\frac{\binom{100}{x}}{\binom{200}{x}}\le 0,1.$$

Com a ajuda de algum software, podemos ver que a fração acima é maior que 0,1 se $x \leq 6$ e é menor que 0.0071 se $x \geq 7$.

Concluímos que, se selecionarmos um conjunto aleatório de 7 bolas, com probabilidade de pelo menos 90% teremos pelo menos uma boa preta.

(c) Caso quiséssemos garantir com 100% de certeza que existirá pelo menos uma bola preta no nosso conjunto, deveríamos selecionar pelo menos 101 bolas. Mas, caso quiséssemos garantir pelo menos 1 bola preta com alta probabilidade (não exatamente 100%, mas bem próximo disso), precisamos selecionar apenas 7 bolas! A diferença entre esses números é muito grande! 7 bolas representa menos de 10% do nosso espaço amostral.´

9. Primeiro, selecionamos 23 pessoas aleatoriamente e as numeramos de 1 a 23. Vamos calcular a probabilidade de nenhuma delas fazer aniversário no mesmo dia. Para isso, seja X_i a variável aleatória que nos diz o dia do ano em que a pessoa i faz aniversário. Encontrar 23 pessoas que não fazem aniversário no mesmo dia é equivalente a encontrar uma tupla $(X_1, X_2, \ldots, X_{23})$ onde todos os valores são distintos. Pelo princípio multiplicativo da contagem, há

$$365 \times 364 \times \cdots \times (365 - 22)$$

formas de escolher essas tuplas. Mas, como as pessoas foram escolhidas aleatoriamente, a probabilidade de escolhermos uma tupla fixada é

$$\frac{1}{365^{23}}.$$

Portanto, segue que a probabilidade de não existirem duas pessoas que fazem aniversário no mesmo é

$$\frac{365!}{344! \cdot 365^{23}} \leq 0,4928.$$

Assim, a probabilidade de existirem duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia é de pelo menos $1 - 0,4928 = 0,5072$.

Material elaborado por Letícia Mattos.