

Módulo de Porcentagem

Porcentagem

Oitavo Ano



Porcentagens

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Siga o modelo e calcule as porcentagens:

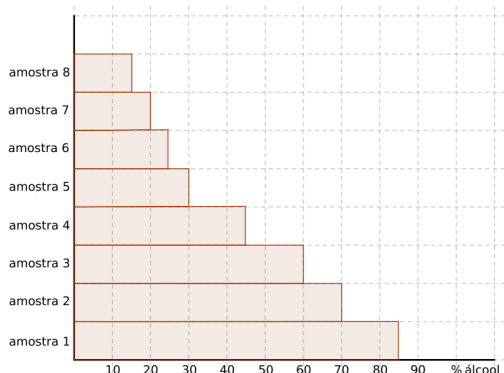
$$\begin{aligned} 5\% \cdot 130 &= \frac{5}{100} \cdot 130 \\ &= \frac{650}{100} \\ &= 6,5. \end{aligned}$$

- a) $10\% \cdot 120$.
- b) $7\% \cdot 80$.
- c) $15\% \cdot 90$.
- d) $0,5\% \cdot 200$.

Exercício 2. Calcule:

- a) o quadrado de 4% e expresse o resultado como em porcentagens;
- b) a raiz quadrada de 64% e expresse o resultado em porcentagens;
- c) o valor de 6% de 180.

Exercício 3. Para testar a qualidade de um combustível composto apenas de gasolina e álcool, uma empresa recolheu oito amostras em vários postos de gasolina. Para cada amostra foi determinado o percentual de álcool e o resultado é mostrado no gráfico abaixo. Em quais dessas amostras o percentual de álcool é maior que o percentual de gasolina?



Exercício 4. Contrariando o plano real, um comerciante aumenta o preço de um produto que custava R\$ 300,00 em 20%. Um mês depois arrependeu-se e fez um desconto de 20% sobre o preço reajustado. Qual o novo preço do produto?

Exercício 5. Um fabricante de chocolate cobrava R\$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R\$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

Exercício 6. Um produtor de arroz vendeu 60% da sua produção para a distribuidora A e 40% para a distribuidora B, as quais doaram 4% e 2%, respectivamente, do arroz comprado. Qual a porcentagem do arroz produzido foi doada?

Exercício 7. Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:

Exercício 8. Um produto sofreu um aumento de 25%. Em seguida, devido a variações no mercado, seu preço teve que ser reduzido também em 25%, passando a custar R\$225,00. Qual o preço desse produto antes do aumento?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Joãozinho andava pela rua quando avistou em uma loja o seguinte anúncio:

“Tudo com 50% de desconto”.

Admirado e tratando de se beneficiar com a promoção, Joãozinho entrou na loja e comentou com o vendedor: “Assim vocês devem ter prejuízo...” O vendedor explicou que, ainda assim, a margem de lucro da loja era de 20% sobre cada mercadoria. Neste caso, qual era a margem de lucro sobre cada mercadoria antes da promoção?

Exercício 10. Num certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 10% e o da maçã subiu 2%. Quanto se gastará (em porcentagem) a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

Exercício 11. Joãozinho gastou a metade do dinheiro que tinha com um presente que comprou para a sua mãe. Em seguida, gastou 30% do que lhe restou, na compra de um jogo, e ainda ficou com R\$ 63,00. Quantos reais tinha Joãozinho antes das compras?

Exercício 12. Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

Exercício 13. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que no aquário 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

Exercício 14. *Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?*

Exercício 15. *Na população de uma espécie rara de 1000 aves da floresta amazônica, 98% tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que matou parte das aves com cauda verde, esta porcentagem caiu para 95%. Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. *Numa festa, o número de pessoas que dançam é igual a 25% do número de pessoas que não dançam. Qual é a porcentagem do total de pessoas na festa que não dançam?*

Exercício 17. *Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%.*

- a) *Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?*
- b) *Quantos homens e quantas mulheres haviam na festa depois da chegada dos casais?*

Exercício 18. *Gabriel resolveu uma prova de matemática com questões de álgebra, geometria e lógica. Após checar o resultado da prova Gabriel observou que respondeu corretamente 50% das questões de álgebra, 70% das questões de geometria e 80% das questões de lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente 62% das questões de álgebra e lógica e 74% das questões de geometria e lógica. Qual a porcentagem de questões corretas da prova de Gabriel?*

Exercício 19. *Em uma certa empresa, 10% dos empregados recebem 90% de todo o dinheiro gasto com salários. A empresa está dividida em departamentos. É possível que em cada departamento o dinheiro gasto com os salários de quaisquer 10% dos empregados seja no máximo 11% do dinheiro gasto com todos os salários pagos naquele departamento?*

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. a)12 b)5,6 c)13,5 d)1

2. (Extraído e Adaptado do Vestibular da UFBA)

a) $(4\%)^2 = \left(\frac{4}{100}\right)^2 = \left(\frac{16}{10000}\right) = \left(\frac{0,16}{100}\right) = 0,16\%$.

b) $\sqrt{64\%} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$.

c) $6\% \cdot 180 = \frac{6}{100} \cdot 180 = \frac{1080}{100} = 10,8$.

3. (Extraído e Adaptado da OBMEP) As amostras que o gráfico expõe possuindo um percentual de álcool acima de 50% são as respostas para o exercício. Pelo gráfico, tratam-se das amostras 1, 2 e 3.

4. (Extraído do Vestibular da UNIMEP - Rio de Janeiro)

a) Primeira situação: aumento de 20% faz com que o novo preço seja 120% do inicial:

$$120\% \cdot R\$ 300,00 = R\$ 360,00.$$

b) Segunda situação: desconto de 20% sobre o novo preço faz com que este seja 80% do anterior:

$$80\% \cdot R\$ 360,00 = R\$ 288,00.$$

Portanto, o novo preço será de R\$ 288,00.

5. (Extraído da OBMEP) Na primeira situação, cada grama custa $5,00/250 = R\$ 0,02$ enquanto que na segunda, cada grama custa $5,00/200 = R\$ 0,025$. Assim, estamos pagando a mais R\$0,005 por cada grama. Para sabermos que fração percentual esse acréscimo representa no preço anterior, basta efetuarmos a divisão:

$$\frac{0,005}{0,02} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

Ou seja, com o novo preço, estamos pagando 25% a mais do que pagávamos anteriormente por cada grama.

Observação: Veja que o acréscimo percentual no preço vale para qualquer quantidade de gramas. Assim, outra maneira de resolver o problema seria comparar a variação de preços para um múltiplo comum das duas quantidades. Anteriormente, por um quilo pagávamos $R\$5,00 \times 4 = R\$ 20,00$. Com o novo preço, o valor sobe para $R\$5,00 \times 5 = R\$ 25,00$. A diferença de R\$ 5,00 representa o aumento percentual de:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

6. (Extraído do Vestibular da UFU - Minas Gerais)

i) Porcentagem doada por A:

$$4\% \cdot 60\% = \frac{4}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{240}{10000}.$$

ii) Porcentagem doada por B:

$$2\% \cdot 40\% = \frac{2}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{80}{10000}.$$

iii) Porcentagem resultante:

$$\frac{240}{10000} + \frac{80}{10000} = \frac{320}{10000} = \frac{3,2}{100} = 3,2\%.$$

7. i) Um desconto de 20% faz com que fiquemos com 80% do valor inicial V :

$$80\% \cdot V = \frac{80}{100}V.$$

ii) Um desconto de 30% sobre o novo preço faz com que este seja 70% do anterior:

$$70\% \cdot 80\% \cdot V = \frac{70}{100} \cdot \frac{80}{100}V = \frac{56}{100}V = 56\% \cdot V.$$

Como só nos restou 56% do valor de V , os descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um desconto de $100\% - 56\% = 44\%$.

8. (Extraído do Vestibular do CEFET - Ceará)

i) Um aumento de 25% faz com que fiquemos com 125% do valor inicial V , ou seja, $125\% \cdot V$.

ii) Um desconto de 25% sobre o novo preço faz com que este seja 75% do anterior, ou seja, $125\% \cdot 75\% \cdot V$

iii) Igualando ao valor dado:

$$125\% \cdot 75\% \cdot V = 225$$

$$\frac{125}{100} \cdot \frac{75}{100} \cdot V = 225$$

$$V = 225 \cdot \frac{100}{125} \cdot \frac{100}{75}$$

$$V = 240.$$

Portanto, $V = R\$240,00$.

2 Exercícios de Fixação

9. (Extraído do Clube de Matemática da OBMEP) Suponhamos que o preço original de venda de uma mercadoria fosse de R\$ 120,00. Na promoção, essa mercadoria valeria, então, R\$ 60,00. Se, para esta venda, a margem de lucro da loja é de 20% e o valor do produto é V , temos:

$$60 = V + 20\% \cdot V$$

$$= 1,2V$$

Consequentemente, $V = R\$ 50,00$. O lucro original então seria de $120,00 - 50,00 = R\$ 70,00$, o que representa a margem de lucro de $\frac{70}{50} = 140\%$ sobre o valor de custo da mercadoria.

Comentário para professores: O valor arbitrário referência de R\$ 120,00 para venda não tira a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso o valor de venda seja multiplicado por uma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o valor de 120 por p arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

10. (Extraído da OBMEP) Seja V o preço da dúzia de ovos que coincide com o preço da dezena de maçãs. Com a subida de 10% no preço dos ovos, a dúzia passará a custar $V + 10\%V = 1,1V$. Com a queda de 2% no preço das maçãs, elas passarão a custar $V - 2\%V = 0,98V$. Daí, antes o preço da compra pedida era $2V$ e agora passou para $2,08V$. Tivemos assim um aumento de 0,08 que corresponde ao aumento percentual de:

$$\frac{0,08V}{2V} = 0,04 = \frac{4}{100} = 4\%.$$

Observação: Veja que poderíamos ter atribuído um valor arbitrário para V e a resposta seria a mesma pois o percentual não se altera quando multiplicamos os valores por uma mesma constante.

11. Seja x a quantidade inicial de dinheiro do Joãozinho.

i) Após comprar o presente para a mãe, Joãozinho ficou com $\frac{x}{2}$.

ii) Após gastar 30% do que sobrou, ele ficou com

$$70\% \cdot \frac{x}{2} = \frac{70x}{200}.$$

Portanto, $\frac{70x}{200} = 63$ e $x = R\$ 180,00$.

12. (Extraído da OBM) Como o aumento de 2% de um número x corresponde à 1, temos $\frac{2x}{100} = 1$ e $x = 50$. Portanto, seu sucessor é 51 e a soma de ambos é 101.

13. (Extraído da OBM) Seja $100p$ a quantidade de peixes no aquário. Se A e V denotam as quantidades de peixes amarelos e vermelhos, temos $A = 90p$ e $V = 10p$. Se após a morte de x peixes amarelos eles ainda constituíam 75% dos peixes restantes, temos $90p - x = \frac{75}{100}(100p - x)$, ou seja, $x = 60p$. Se morreram $60p$ dos $90p$ peixes amarelos, a mortandade foi de $\frac{60p}{90p} = \frac{2}{3} = \frac{66,6}{100}$, ou seja, aproximadamente 67%.

14. (Extraído da OBM) A mistura final tem 0,2 litros de polpa e $3 + 0,8 = 3,8$ litros de água. A porcentagem de polpa em relação ao volume da mistura é $\frac{0,2}{4} = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$.

15. (Extraído da OBM) Inicialmente existiam 980 aves com a cauda verde e 20 das demais. Após a epidemia, estas 20 aves correspondem a 5%, donde o total de aves agora é $20 \times 20 = 400$ (sendo 380 da cauda verde). Portanto, morreram 600 aves.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

16. (Extraído da OBM) Sejam x e y os números de pessoas que dançam e que não dançam, respectivamente. Como $x = \frac{25}{100} \cdot y$, temos $y = 4x$. Portanto, a porcentagem do número de pessoas que não dançam é:

$$\frac{y}{x + y} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%.$$

17. (Extraído da OBMEP)

a) Sejam m o número de mulheres e h o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos:

$$m = 4h.$$

Deste modo, a fração de homens pelo total de pessoas presentes antes da chegada dos cinco casais era:

$$\frac{h}{h + m} = \frac{h}{h + 4h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

b) Após a chegada dos cinco casais, ficamos com $h + 5$ homens e $m + 5$ mulheres. Assim, o novo percentual de homens é:

$$\frac{h + 5}{h + 5 + m + 5} = \frac{h + 5}{h + 4h + 10} = \frac{h + 5}{5h + 10}.$$

Fazendo $\frac{h + 5}{5h + 10} = \frac{26}{100}$, temos $h = 8$. Consequentemente $m = 4h = 32$ e após a chegada dos cinco casais teremos $8 + 5 = 13$ homens e $32 + 5 = 37$ mulheres.

18. (Extraído da OBM) Sejam A , G e L as quantidades de questões de álgebra, geometria e lógica. Sabendo que ele acertou $70\% \cdot G$ e $80\% \cdot L$ questões de geometria e lógica, respectivamente, o percentual de questões respondidas corretamente incluindo esses dois assuntos é $\frac{0,7G + 0,8L}{G + L}$. Como o percentual anterior deve ser igual a 74%, temos:

$$\begin{aligned} \frac{0,7G + 0,8L}{G + L} &= \frac{74}{100} \\ 0,04G &= 0,06L \\ G &= \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, como ele acertou 50%. A questões de álgebra, também podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{0,5A + 0,8L}{A + L} &= \frac{62}{100} \\ 18L &= 12A \\ A &= \frac{3L}{2}.\end{aligned}$$

A porcentagem de questões respondidas corretamente é:

$$\begin{aligned}\frac{0,5A + 0,7G + 0,8L}{A + G + L} &= \frac{0,5 \cdot \frac{3}{2}L + 0,7 \cdot \frac{3}{2}L + 0,8L}{\frac{3}{2}L + \frac{3}{2}L + L} \\ &= \frac{2,6}{4} \\ &= 65\%.\end{aligned}$$

19. Sim, é possível. Considere uma empresa com 100 funcionários e consistindo apenas de dois departamentos: um com 10 funcionários que recebem 90% de todos os salários e outro com 90 funcionários recebendo os 10% restantes. Em cada departamento, distribua salários iguais para todos os funcionários. Em cada departamento, quaisquer 10% dos funcionários ganham exatamente 10% < 11% do dinheiro gasto com salários em tal departamento.