

Módulo de Razões e Proporções

Proporção e Conceitos Relacionados

7º ano E.F.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Dados os números reais a, b, c e d . Dizemos que eles são diretamente proporcionais se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ com } b \text{ e } d \text{ não nulos}$$

e lê-se a está para b assim como c está para d . Verifique se os números abaixo, na ordem dada, são diretamente proporcionais.

- a) (2, 4, 3, 6).
- b) (2, 15, 3, 60).
- c) (4, 20, 15, 75).

Exercício 2. Dados os números reais a, b, c e d . Dizemos que eles são inversamente proporcionais se

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{c}{\frac{1}{d}}, \text{ ou seja, se } ab = cd, \text{ com } b \text{ e } d \text{ não nulos.}$$

Verifique se os números abaixo, na ordem dada, são inversamente proporcionais.

- a) (8, 5, 1, 40).
- b) (15, 2, 3, 10).
- c) (1, 20, 2, 40).

Exercício 3. Prove que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $b + d \neq 0$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{\frac{a+c}{b+d}}$.

Exercício 4. Dividir um valor n em partes a e b diretamente proporcionais a x e y é o mesmo que resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b = n \\ \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{a+b}{x+y} = \frac{n}{x+y} \end{cases}$$

- a) Divida o número 400 em partes diretamente proporcionais aos números 3, 7.
- b) Divida o número 180 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

Exercício 5. Dividir um valor n em partes a e b inversamente proporcionais a x e y é mesmo que resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b = n \\ \frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{a+b}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{n}{\frac{x+y}{xy}} \end{cases}$$

- a) Divida o número 120 em partes inversamente proporcionais a 2 e 4.
- b) Divida o número 72 em parcelas inversamente proporcionais a 3, 4 e 6.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Em uma padaria, 10 litros de uma mistura de café com leite, em quantidades iguais, é vendida no café da manhã. Para obter um teor de $\frac{4}{5}$ de café e $\frac{1}{5}$ de leite, quantos litros de cada um desses dois líquidos deve-se acrescentar aos 10 litros da mistura?

Exercício 7. Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas ao mesmo tempo. Observou-se que o resto de uma tinha o dobro do resto da outra. Por quanto tempo ficaram acesas?

Exercício 8. Uma empresa de impressões digitais tem uma copiadora A que imprime 500 páginas em oito minutos. O dono da empresa decide comprar outra máquina copiadora B mais moderna e observa que as duas máquinas trabalhando juntas imprimem 500 páginas em dois minutos. Em quanto tempo a máquina B imprime 500 páginas?

Exercício 9. Se um pacote de biscoito contém 10 biscoitos e pesa 95 gramas, e se 15 gramas de biscoito correspondem a 90 calorias, quantas calorias tem cada biscoito?

Exercício 10. A distância entre as cidades mineiras de Belo Horizonte e Montes Claros, em um mapa representado em escala 1 : 7000000, é de 6,5 cm. Qual a distância real entre essas duas cidades?

Exercício 11. Uma composição ferroviária usada para o transporte de mercadorias faz o percurso entre duas cidades, distantes 72 km uma da outra, em um intervalo de tempo de 2 h. A locomotiva, que mede 20 m de comprimento, puxa um comboio formado por N vagões de 15 m de comprimento cada um. Sabe-se que no meio do caminho entre as duas cidades existe uma ponte de 490 m de comprimento e que a composição leva 1 min para atravessá-la completamente. Nesse sentido, qual o número N de vagões que formam a composição?

Exercício 12. Um automóvel pode andar, sem abastecimento e mantendo consumo constante, durante 360 minutos. Tendo saído com um furo no tanque de combustível, que escoava combustível numa vazão constante, ele andou apenas 144 minutos. Qual a fração da quantidade de combustível que escoaria caso ficasse 15 minutos parado?

Exercício 13. Uma pessoa com 80 kg de massa corporal iniciou um tratamento médico para redução dessa massa e, no 15º dia do tratamento, já havia reduzido 3 kg. Supondo que a redução diária de massa seja sempre a mesma, qual o número de dias necessários, a partir do início do tratamento, para que essa pessoa atinja 65 kg?

Exercício 14. Gabriela e Jonas moram na mesma casa e estudam na mesma escola. Jonas vai de casa à escola em 30 minutos e Gabriela em 40 minutos. Se Gabriela saiu de casa 5 minutos mais cedo, quantos minutos Jonas levará para alcançá-la, considerando que as velocidades de ambos são constantes?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Dois recipientes, R_1 e R_2 , contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções: 3 : 5, em R_1 e 2 : 3 em R_2 . Juntando-se em um terceiro recipiente os conteúdos de R_1 e R_2 , qual a proporção de álcool e água nesta mistura?

Exercício 16. Sueli colocou 40 mL de café em uma xícara vazia de 80 mL, e 40 mL de leite em outra xícara vazia de mesmo tamanho. Em seguida, Sueli transferiu metade do conteúdo da primeira xícara para a segunda e, depois de misturar bem, transferiu metade do novo conteúdo da segunda xícara de volta para a primeira. Do conteúdo final da primeira xícara, a fração correspondente ao leite é

Exercício 17. Na cidade, um automóvel consome 1 litro de gasolina a cada 10 km percorridos. Já na estrada, o mesmo veículo consome 1 litro de gasolina a cada 18 km percorridos. Uma pessoa pretende utilizar esse carro para fazer uma viagem em que 25% do percurso será na cidade e o restante será na estrada. Nessa viagem, qual será a distância média percorrida com um 1 litro de gasolina?

Exercício 18. O reservatório de água de uma certa cidade está com o nível abaixo do recomendado, tendo disponível apenas 125000 L. Dessa forma, a água que ainda resta deve passar por um tratamento químico mais intensivo para que possa ser consumida. Para isso, deve ser misturado cloro numa razão de 3 g para 12 litros de água. Qual a quantidade de cloro necessária para tratar toda água disponível no reservatório?

Exercício 19. Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial fixo, chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional aos quilômetros percorridos. Se por uma corrida de 8 km paga-se R\$ 28,50 e por uma corrida de 5 km paga-se R\$ 19,50, então qual o valor da bandeirada?

Respostas e Soluções.

1. Seguindo o enunciado, precisamos checar se

a) $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, ou seja, $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são diretamente proporcionais.

b) $\frac{2}{15} = \frac{3}{60}$, ou seja, $2 \cdot 60 = 3 \cdot 15$. Como a igualdade é falsa, os números dados NÃO são proporcionais.

c) $\frac{4}{20} = \frac{15}{75}$, ou seja, $4 \cdot 75 = 15 \cdot 20$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são diretamente proporcionais.

2. Seguindo o enunciado, precisamos checar se:

a) $\frac{8}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{40}}$, ou seja, $8 \cdot 5 = 1 \cdot 40$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são inversamente proporcionais.

b) $\frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{10}}$, ou seja, $15 \cdot 2 = 3 \cdot 10$ o que é verdadeiro. Assim, os números dados são inversamente proporcionais.

c) $\frac{1}{\frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{1}{40}}$, ou seja, $1 \cdot 20 \neq 2 \cdot 40$. Como a igualdade anterior é falsa, os números dados NÃO são proporcionais.

3. **Demonstração:** Podemos escrever $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ para algum k real. Daí, temos $a = bk$, $c = dk$ e

$$a + c = bk + dk = k(b + d) \text{ e } \frac{a + c}{b + d} = \frac{k(b + d)}{b + d} = k.$$

■

4. Devemos aplicar o exposto no enunciado:

a) Sendo as partes iguais a a e b , podemos escrever

$$\begin{cases} a + b = 200 \\ \frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{a + b}{3 + 7} = \frac{400}{10} = 40 \end{cases}$$

Assim, $\frac{a}{3} = 40$ com $a = 120$ e $\frac{b}{7} = 40$ com $b = 280$.

b) Sendo as partes iguais a a , b e c , podemos escrever

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a + b + c}{2 + 3 + 4} = \frac{180}{9} = 20 \end{cases}$$

Assim, $\frac{a}{2} = 20$ com $a = 40$, $\frac{b}{3} = 20$ com $b = 60$ e $\frac{c}{4} = 20$ com $c = 80$.

5. Devemos aplicar o exposto no enunciado.

a) Sendo as partes iguais a a e b , podemos escrever

$$\begin{cases} a + b = 120 \\ \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{120}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{120 \cdot 4}{3} = 160 \end{cases}$$

Assim, $2a = 160$ e $a = 80$ e $4b = 160$ com $b = 40$.

b) Sendo as partes iguais a a , b e c , podemos escrever

$$\begin{cases} a + b + c = 72 \\ \frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{120}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{120 \cdot 12}{9} = 160 \end{cases}$$

Assim, $a = \frac{160}{3}$, $b = 40$ e $c = \frac{80}{3}$.

6. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) – 2014)

Temos que na mistura inicial há 5 litros de café e 5 litros de leite. Como queremos mais café do que leite, devemos acrescentar mais café. Para encontrar a quantidade, basta fazer

$$\begin{aligned} \frac{5 + x}{10 + x} &= \frac{4}{5} \\ 25 + 5x &= 40 + 4x \\ x &= 15 \text{ litros de café.} \end{aligned}$$

7. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) – 2014)

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o tamanho das velas seja igual a 12 cm. A proporção de queima da primeira vela é de $\frac{12}{4} = 3$ cm/h e a segunda é $\frac{12}{6} = 2$ cm/h. Depois de t horas a primeira mede $12 - 3t$ e a segunda $12 - 4t$. Queremos o tempo tal que $2(12 - 3t) = 12 - 2t$, isso gera $4t = 12$ e $t = 3$ horas.

8. (Extraído do vestibular da UEG (GO) – 2014)

Em um minuto a primeira máquina faz a proporção de $\frac{1}{8}$ do trabalho, a segunda faz $\frac{1}{t}$ e as duas juntas fazem $\frac{1}{2}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} + \frac{1}{t} &= \frac{1}{2} \\ \frac{t + 8}{8t} &= \frac{4t}{8t} \\ 3t &= 8 \\ t &= 2 \text{ minutos e } 40 \text{ segundos.} \end{aligned}$$

9. (Extraído do vestibular da UECE (CE) – 2015)

Temos, em média, $\frac{90}{15} = 6$ calorias por grama. Além disso, no geral, cada biscoito tem $\frac{95}{10} = 9,5$ gramas. Assim, cada um deles possui $9,5 \cdot 6 = 57$ calorias.

10. (Adaptado do vestibular da UEL (PR) – 2015)

Temos a proporção de 1 cm no mapa para 7000000 cm = 70000 m = 70 km na realidade. Assim, a distância pedida é igual a $6,5 \cdot 70 = 455$ km.

11. (Adaptado do vestibular da UEPA (PA) – 2015)

A velocidade média da composição é de $\frac{72}{2} = 36$ km/h, o que equivale a $\frac{36000}{60} = 600$ metros por minuto. O comprimento total da composição (locomotiva mais N vações de 15 metros) é $20 + 15N$. Para entrar e sair da ponte a distância total percorrida foi de $490 + 20 + 15N = 510 + 15N$ e no tempo de um minuto, ele percorre 600 metros. Assim, podemos escrever que $510 + 15N = 600$ e $N = 6$ vações.

12. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) – 2015)
Em um minuto ele consumiu $\frac{1}{360}$ do total, o furo reduziu $\frac{1}{t}$ e juntos fizeram $\frac{1}{144}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{360} + \frac{1}{t} &= \frac{1}{144} \\ \frac{1}{t} &= \frac{1}{144} - \frac{1}{360} \\ \frac{1}{t} &= \frac{5-2}{720} \\ \frac{1}{t} &= \frac{1}{240} \\ t &= 240.\end{aligned}$$

Assim, o tanque ficará vazio em 240 minutos com carro parado. Portanto, em 15 minutos houve o gasto de $\frac{15}{240} = \frac{1}{16}$ da quantidade de combustível no tanque.

13. (Adaptado do vestibular da FCI (SP) – 2015)
Queremos o prazo para a perda de 15 quilos. Por dia a massa está variando, em média, numa proporção de $\frac{3}{15} = 0,2$ kg/dia, após 5 dias ela perde 1 quilo. Assim, o prazo pedido é de $5 \cdot 15 = 75$ dias.

14. (Extraído do vestibular da UNIFOR (CE) – 2015)
Suponha, sem perda de generalidade, que a distância da casa deles até a escola seja 1200 metros. Assim, Jonas anda a $\frac{1200}{30} = 40$ metros por minuto e Gabriela a $\frac{1200}{40} = 30$. Saindo 5 minutos antes, uma equação para o movimento de Gabriela será $150 + 30t$ e a de Jonas é $40t$. Assim, eles se encontrarão depois de $40t = 150 + 30t$, ou seja, $t = 15$ minutos.

15. (Adaptado do vestibular da PUC (SP) – 2014)
Sejam x_i e y_i as quantidades de álcool e água no recipiente i , com $i \in \{1, 2\}$, cada um com capacidade n . Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = n \\ \frac{x_1}{3} = \frac{y_1}{5} = k_1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + y_2 = n \\ \frac{x_2}{2} = \frac{y_2}{3} = k_2, \text{ com } k_2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Assim, $x_1 = 3k_1$ e $y_1 = \frac{5k_1}{n}$ fazendo $n = 8k_1$ ou $k_1 = \frac{n}{8}$. Assim, $x_2 = 2k_2$ e $y_2 = \frac{3k_2}{n}$ fazendo $n = 5k_2$ ou $k_2 = \frac{n}{5}$.

Por fim, a razão fica

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} &= \frac{3k_1 + 2k_2}{5k_1 + 3k_2} = \\ &= \frac{3 \cdot \frac{n}{8} + 2 \cdot \frac{n}{5}}{5 \cdot \frac{n}{8} + 3 \cdot \frac{n}{5}} = \\ &= \frac{15n + 16n}{25n + 24n} = \frac{31}{49}.\end{aligned}$$

16. (Adaptado do vestibular da FGV (SP) – 2015)
Vamos acompanhar todas as trocas. Primeiro, foram 20 ml de café para a segunda xícara, na qual agora temos 60 ml, $\frac{1}{3}$ de café e $\frac{2}{3}$ de leite. Assim, dos 30 ml da segunda transferência, 10 ml foram de café e 20 ml de leite. A primeira ficou com 50 ml, sendo $\frac{2}{5}$ de leite.

17. (Adaptado do vestibular do IBMEC (SP) – 2015)
Os consumos de gasolina por quilômetro na cidade e na estrada são $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{18}$, respectivamente. Portanto, no trajeto proposto, o consumo de gasolina por quilômetro será de $0,25 \cdot \frac{1}{10} + 0,75 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{15}$. Assim a distância média percorrida por litro de gasolina será de $15km$.

18. (Adaptado do vestibular do IFSC (SP) – 2015)
A mistura fica com concentração de $\frac{3}{12} = 0,25$ gramas de cloro por litro. Por fim, basta fazermos

$$125000 \cdot 0,25 = 31250 \text{ gramas} = 31,25 \text{ kg}.$$

19. (Adaptado do vestibular da UECE (CE) – 2014)
Sejam b e x os valores da bandeira e do quilômetro rodado. Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} 8x + b = 28,50 \\ 5x + b = 19,50 \end{cases}$$

Ao subtraí-las, teremos $3x = 9$ e $x = 3$. Por fim, basta substituímos em alguma das equações do sistema para encontramos $b = 4,50$. Assim, o valor da bandeirada é R\$ 4,50.