Módulo Números Complexos - Forma Algébrica

Introdução à forma polar de um número complexo

3° ano E.M.

Portal da Matemática
OBMEP

Introdução à forma polar de um número complexo

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Encontre a representação polar dos números complexos:

a) $z = -1 - i$.

b) $z = 2 + 2i$.

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$.

d) $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Exercício 2. Encontre a representação polar dos seguintes números complexos

a) $z = 2i$.

b) $z = -1$.

c) $z = 2$.

d) $z = -3i$.

Exercício 3. Determine o módulo e o argumento principal dos seguintes números complexos

a) $z = 4$.

b) $z = 1 + i$.

c) $z = 1 + i\sqrt{3}$.

d) $z = 2 - 2i$.

Exercício 4. Coloque na forma algébrica os seguintes números:

(a) $z = 3 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$.

(b) $z = 4 \cdot (\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)$.

(c) $z = 4 \cdot (\cos 11\pi/6 + i \operatorname{sen} 11\pi/6)$.

(d) $z = 5 \cdot (\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2)$.

Exercício 5. Calcule o módulo dos números

(a) $z = (1 - i)(2 + i)$

(b) $z = (\sqrt{3} + i)^5$.

(c) $z = \dfrac{5i}{3 + 4i}$.

Exercício 6. Escreva na forma trigonométrica o número complexo $(1/2 + i\sqrt{3}/2)^{10}$.

Exercício 7. Escreva na forma trigonométrica o número complexo $z = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})^6}{i^7}$.

Exercício 8. Fixado θ, qual a representação gráfica dos números complexos $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ quando r varia no conjunto $\mathbb{R}$.

Exercício 9. Calcule o valor de $(-\sqrt{3} - i)^{10}$.

Exercício 10. Determine o menor número natural n para o qual $(i - \sqrt{3})^n$ é um imaginário puro

Exercício 11. Escreva na forma trigonométrica os conjugados dos seguintes números complexos:

a) $z = 1/(1 + i)$

b) $z = (1 + i)^2$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 12. Calcule o valor de $(1 + i)^{200}$

Exercício 13. Calcule $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{10}$

Exercício 14. Calcule $\left(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}\right)^{20}$

Exercício 15. Calcule o valor de

$$z = \frac{(1 - i)^{10}(\sqrt{3} + i)^5}{(-1 - i\sqrt{3})^{10}}.$$

Exercício 16. Determine $|z|$ e $argz$ se

$$z = (1 + i\sqrt{3})^{100} + (1 - i\sqrt{3})^{100}.$$

Exercício 17. Verifique que

$$\cos^3\theta = (3\cos\theta + \cos 3\theta)/4.$$

Exercício 18. Determine a forma trigonométrica do número $-\dfrac{1 + i \operatorname{tg}\alpha}{1 - i \operatorname{tg}\alpha}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 19. Simplifique $(1 + w)^{100}$ se $w = \cos(2\pi/3) + i \operatorname{sen}(2\pi/3)$.

Exercício 20. Se $w_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ e $w_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$, determine o valor de $w_1^{100} + w_2^{100}$.

Exercício 21. Sejam n um número natural e z é um número complexo de módulo unitário tal que $z^{2n} \neq -1$. Verifique que $\dfrac{z^n}{1 + z^{2n}} \in \mathbb{R}$.

Exercício 22. Encontre todos os números complexos z tais que $|z| = 1$ e

$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

Exercício 23. Se $a = \cos\pi/5$ e $b = \operatorname{sen}\pi/5$, então o número complexo $(\cos\pi/5 + i \operatorname{sen}\pi/5)^{54}$ é igual a

a) $a + bi$.

b) $-a + bi$.

c) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.

d) $a - bi$.

e) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

Exercício 24. Determine uma expressão reduzida para o somatório:

$$\binom{2004}{0} + \binom{2004}{3} + \binom{2004}{6} + \ldots + \binom{2004}{2004}$$

Exercício 25. Se $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$, onde $0 < t < 2\pi$, então podemos afirmar que $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ é dado por

a) $i \operatorname{cotg}(t/2)$.

b) $i \operatorname{tg}(t/2)$.

c) $i \operatorname{cotg}(t)$.

d) $i \operatorname{tg} t$.

e) n.d.a.

Exercício 26. Para cada n, temos que

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1$$

é igual a:

a) $(-1)^n \cdot 2^{2n}$ b) 2^{2n} c) $(-1)^n \cdot 2^n$ d) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$ e) $(-1)^{n+1} \cdot 2^n$.

Exercício 27. Se $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$, verifique que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta.$$

Exercício 28. Mostre que

$$\operatorname{sen}(2\pi/7) + \operatorname{sen}(4\pi/7) + \operatorname{sen}(8\pi/7) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Respostas e Soluções.

1.

a) $z = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(5\pi/4))$.

b) $z = 2\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4))$.

c) $z = 2(\cos(2\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/3))$.

d) $z = 2(\cos(5\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(5\pi/3))$.

2.

a) $z = 2(\cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2))$.

b) $z = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)$.

c) $z = 2(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\, 0)$.

d) $z = 3(\cos(3\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(3\pi/2))$.

3.

a) $|z| = 4$ e $argz = 0$.

b) $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $argz = \pi/4$.

c) $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ e $argz = \pi/3$.

d) $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ e $argz = 7\pi/4$.

4.

a)

$$\begin{aligned} z &= 3\cdot(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) \\ &= 3\cdot(-1+0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z &= 4\cdot(\cos\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/4) \\ &= 3\cdot(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2) \\ &= 3\sqrt{2}/2 + 3\sqrt{2}i/2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z &= 4\cdot(\cos 11\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\, 11\pi/6) \\ &= 4\cdot(1/2 - \sqrt{3}i/2 \\ &= 2 - 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} z &= 5\cdot(\cos 3\pi/2 + i\,\mathrm{sen}\, 3\pi/2) \\ &= 5(0-i) \\ &= -5i. \end{aligned}$$

5.

(a)

$$\begin{aligned} |z| &= |(1-i)(2+i)| \\ &= |1-i|\cdot|2+i| \\ &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{5} \\ &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} |z| &= |(\sqrt{3}+i)^5| \\ &= |\sqrt{3}+i|^5 \\ &= (\sqrt{9+1})^5 \\ &= 100\sqrt{10}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{5i}{3+4i}\right| \\ &= \frac{|5i|}{|3+4i|} \\ &= \frac{5}{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} (1/2 + i\sqrt{3}/2)^{10} &= (\cos\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/6)^{10} \\ &= (\cos 10\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\, 10\pi/6) \\ &= (\cos 4\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\, 4\pi/6). \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{i^7} &= \frac{2^6 i(\cos\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/3)^6}{i^8} \\ &= 2^6 i\cdot(\cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\, 2\pi) \\ &= 2^6 i \\ &= 2^6(\cos\pi/2 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/2). \end{aligned}$$

8. A representação gráfica consite em uma reta que passa pela origem e forma com o eixo positivo $\vec{ox}$ um ângulo de θ.

9.

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3}-i)^{10} &= 2^{10}(-\sqrt{3}/2 - i/2)^{10} \\ &= 2^{10}(\cos 7\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\, 7\pi/6)^{10} \\ &= 2^{10}(\cos 70\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\, 70\pi/6) \\ &= 2^{10}(\cos 10\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\, 10\pi/6). \end{aligned}$$

10. Se $z = i - \sqrt{3} = 2(\cos 5\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\, 5\pi/6)$, temos

$$\begin{aligned} z^n &= 2^n(\cos(5\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(5\pi/6))^n \\ &= 2^n(\cos(5n\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(5n\pi/6)) \end{aligned}$$

Para que ele seja um imaginário puro, $5n\pi/6 = \pi/2 + \pi k$, ou seja, $5n = 3 + 6k$. Assim, $5n - 3$ deve ser múltiplo de 6 e o menor valor natural para que isso aconteça é $n = 3$.

11.

a)

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{\frac{1}{1+i}} \\
&= \frac{1}{\overline{1+i}} \\
&= \frac{1}{1-i} \\
&= \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{1+i}{2} \\
&= 1/2 + i/2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{(1+i)^2} \\
&= (\overline{1+i})^2 \\
&= (1-i)^2 \\
&= 1 - 2i + i^2 \\
&= -2i \\
&= 2(\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2)
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
(1+i)^{200} &= (\sqrt{2})^{200} \cdot (\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)^{200} \\
&= 2^{100} \cdot (\cos 200\pi/4 + i \operatorname{sen} 200\pi/4)^{200} \\
&= 2^{100} \cdot (\cos 50\pi + i \operatorname{sen} 50\pi) \\
&= 2^{100}.
\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{10} &= 2^{10} \cdot (\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)^{10} \\
&= 2^{10} \cdot (\cos 10\pi/4 + i \operatorname{sen} 10\pi/4) \\
&= 2^{10} \cdot (\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2) \\
&= 2^{100} i.
\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}
\left(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}\right)^{20} &= (\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4)^{20} \\
&= (\cos 60\pi/4 + i \operatorname{sen} 60\pi/4) \\
&= (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \\
&= -1
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
z &= \\
\frac{(\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2)^{10} (\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)^5}{(\cos 5\pi/6 + i \operatorname{sen} 5\pi/5)^{10}} &= \\
\frac{(\cos 30\pi/2 + i \operatorname{sen} 30\pi/2)(\cos 5\pi/3 + i \operatorname{sen} 5\pi/3)}{\cos 50\pi/6 + i \operatorname{sen} 50\pi/5} &= \\
\frac{\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3}{\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3} &= \\
\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3.
\end{aligned}$$

16. Seja $w = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3$. Portanto,

$$z = 2^{100} w^{100} + 2^{100} \overline{w}^{100}.$$

Como $w^3 = 1$ e $w \neq 1$, segue que $\overline{w} = w^2$ e que $w + w^2 = -1$. Assim,

$$\begin{aligned}
z &= 2^{100} w^{100} + 2^{100} \overline{w}^{100} \\
&= 2^{100} w + 2^{100} \overline{w} \\
&= 2^{100} (w + w^2) \\
&= -2^{100}
\end{aligned}$$

17. Seja $w = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = a + bi$. Pelo Binômio de Newton,

$$\begin{aligned}
w^3 &= (a+ib)^3 \\
&= a^3 + 3a^2 bi - 3ab^2 - ib^3
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$w^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

Comparando as partes reais das duas expressões, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= a^3 \\
&= (3\cos\theta + \cos 3\theta)/4.
\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}
-\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} &= -\frac{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha} \\
&= -\frac{(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} \\
&= -\frac{\cos\alpha^2 - \operatorname{sen}\alpha^2 + 2\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha i}{\cos\alpha^2 + \operatorname{sen}\alpha^2} \\
&= -\cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha i.
\end{aligned}$$

19. Como $w^3 = 1$, segue que $(w-1)(w^2 + w + 1) = 0$. Dado que $w \neq 1$, segue que $w^2 + w + 1 = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
(1+w)^{100} &= (-w^2)^{100} \\
&= w^{200} \\
&= (w^3)^{66} w^2 \\
&= w^2.
\end{aligned}$$

O valor procurado é $w^2 = \cos(4\pi/3) + i \operatorname{sen}(4\pi/3)$.

20. Temos $w_1^3 = w_2^3 = 3$. Daí $w_1^{100} + w_2^{100} = w_1 + w_2 = -1$.

21. (Adaptado do vestibular do IME - 2002) Seja $z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$. Portanto, $\overline{z} = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha$ e

$$\begin{aligned}\frac{z^n}{1+z^{2n}} &= \frac{\overline{z}^n \cdot z^n}{\overline{z}^n + z^{2n}\cdot\overline{z}^n}\\ &= \frac{1}{\overline{z}^n + z^n}\\ &= \frac{1}{2\cos n\theta}.\end{aligned}$$

22. $z = \cos x + i\,\text{sen}\,x$ com $x \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned}1 &= \frac{|z^2 + \overline{z}^2|}{|z|^2}\\ &= 2|\cos 2x|.\end{aligned}$$

Daí $\cos 2x = 1/2$ ou $\cos 2x = -1/2$. As soluções dessa equação são os números:

$$x_1 = \pi/6, x_2 = 5\pi/6, x_3 = 7\pi/6, x_4 = 11\pi$$

$$x_5 = \pi/3, x_6 = 2\pi/3, x_7 = 4\pi/3, x_8 = 5\pi/3$$

Cada um deles gera a solução $z_j = \cos x_j + i\,\text{sen}\,x_j$

23. (Extraído do ITA 2009)

$$\begin{aligned}(\cos\pi/5 + i\,\text{sen}\,\pi/5)^{54} &= (\cos 54\pi/5 + i\,\text{sen}\,54\pi/5)\\ &= (\cos 4\pi/5 + i\,\text{sen}\,4\pi/5)\\ &= -\cos\pi/5 + i\,\text{sen}\,\pi/5\\ &= -a + bi.\end{aligned}$$

Resposta letra B.

24. (Adaptado do vestibular do IME de 2005) Se $w = \cos(2\pi/3) + i\,\text{sen}(2\pi/3)$, temos $w^3 = 1$. Além disso, $w^2 + w + 1 = 1$. Daí

$$\begin{aligned}(1+1)^{2004} &= \sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}1^k\\ (1+w)^{2004} &= \sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}w^k\\ (1+w^2)^{2004} &= \sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}w^{2k}\end{aligned}$$

Como $1 + w = -w^2$ e $1 + w^2 = -w$, segue que $(1+w)^{2004} = (-w^2)^{2004} = 1$ e $(1+w^2)^{2004} = (-w)^{2004} = 1$. Somando as três equações, temos

$$2 + 2^{2004} = \sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}(1^k + w^k + w^{2k}). \qquad (1)$$

Temos três casos a considerar: $k = 3q$, $k = 3q+1$ e $k = 3q+1$.

a) $1^k + w^k + w^{2k} = 1^{3q} + w^{3q} + w^{6q} = 3$

b) $1^k + w^k + w^{2k} = 1^{3q+1} + w^{3q+1} + w^{6q+2} = 0$

c) $1^k + w^k + w^{2k} = 1^{3q+2} + w^{3q+2} + w^{6q+4} = 0$

Logo

$$1 + w^k + w^{2k} = \begin{cases} 3 \text{ se } 3 \mid k\\ 0 \text{ caso contrário}\end{cases}$$

Finalmente, substituindo na equação (1), temos

$$\begin{aligned}2 + 2^{2004} &= \sum_{k=0}^{2004}\binom{2004}{k}(1^k + w^k + w^{2k})\\ 2 + 2^{2004} &= 3\sum_{q=0}^{368}\binom{2004}{3q}\\ \frac{2+2^{2004}}{3} &= \sum_{q=0}^{368}\binom{2004}{3q}.\end{aligned}$$

25. (Extraído do vestibular do ITA - 1991)

$$\begin{aligned}w &= \frac{1+z}{1-z}\\ &= \frac{1+\cos t + i\,\text{sen}\,t}{1-\cos t - i\,\text{sen}\,t}\\ &= \frac{(1+\cos t + i\,\text{sen}\,t)(1-\cos t + i\,\text{sen}\,t)}{(1-\cos t)^2 + \text{sen}^2\,t}\\ &= \frac{(1+i\,\text{sen}\,t)^2 - \cos^2 t}{(1-\cos t)^2 + \text{sen}^2\,t}\\ &= \frac{2i\,\text{sen}\,t}{2-2\cos t}\\ &= \frac{2i\,\text{sen}\,t}{2-2\cos t}\\ &= \frac{4i\,\text{sen}(t/2)\cos(t/2)}{4\,\text{sen}^2(t/2)}\\ &= i\,\text{cotg}(t/2).\end{aligned}$$

Resposta letra A.

26. (Extraído do ITA) Se $i^2 = -1$, temos

$$\begin{aligned}(i+1)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}i^k\\ ((i+1)^2)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}i^{2j} + \sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}i^{2j+1}\\ (2i)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}(-1)^j + i\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}(-1)^j\right).\end{aligned}$$

Como $(2i)^{2n} = (-1)^n 2^{2n}$ é número real, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n} \binom{4n}{2j} (-1)^j &= (-1)^n 2^{2n} \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n}{2j+1} (-1)^j &= 0. \end{aligned}$$

A resposta é a letra A.

27. Seja $w = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$. Assim $w + \overline{w} = 2\cos\theta$. Como w tem módulo unitário, segue que $\overline{w} = 1/w$. Assim

$$\begin{aligned} w + \frac{1}{w} &= z + \frac{1}{z} \\ \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 \\ w^2 + 2 + \frac{1}{w^2} &= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \\ w^2 + \frac{1}{w^2} &= z^2 + \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Denote por $K_n = z^n + \dfrac{1}{z^n}$ e $T_n = w^n + \overline{w^n}$. Assim, $K_1 = T_1 = 2\cos\theta$ e $K_2 = T_2$. Suponha que $T_n = K_n$ para todo $n \leq m$. Daí

$$\begin{aligned} \left(z^m + \frac{1}{z^m}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(w^m + \frac{1}{w^m}\right)\left(w + \frac{1}{w}\right) \\ z^{m+1}\frac{1}{z^{m+1}} + z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}} &= w^{m+1}\frac{1}{w^{m+1}} + w^{m-1} + \frac{1}{w^{m-1}} \\ z^{m+1} + \frac{1}{z^{m+1}} &= w^{m+1} + \frac{1}{w^{m+1}} \\ K_{m+1} &= T_{m+1} \end{aligned}$$

Assim, $K_n = T_n$ para todo n natural. Como

$$\begin{aligned} w^n &= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n \\ &= \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta \\ \overline{w}^n &= (\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n \\ &= \cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= T_n \\ &= (\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) \\ &+ (\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta) \\ &= 2\cos\theta. \end{aligned}$$

28. Sejam $x = \cos(2\pi/7) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/7)$, $p = x + x^2 + x^4$ e $q = x^3 + x^5 + x^6$. A quantidade desejada é a parte imaginária de p. Como $x^7 = 1$, segue que $p + q = -1$ e $pq = 2$. Resolvendo a equação do segundo grau $m^2 + m + 2 = 0$, encontramos $Im\,p = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com