Módulo de Progressões Aritméticas

Soma dos termos de uma P.A.

1^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

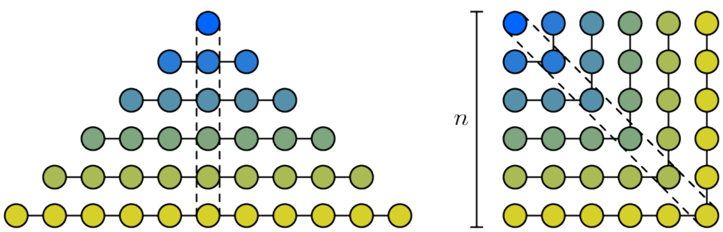
Progressões Aritméticas
Soma dos termos de uma PA

1 Exercícios Introdutórios

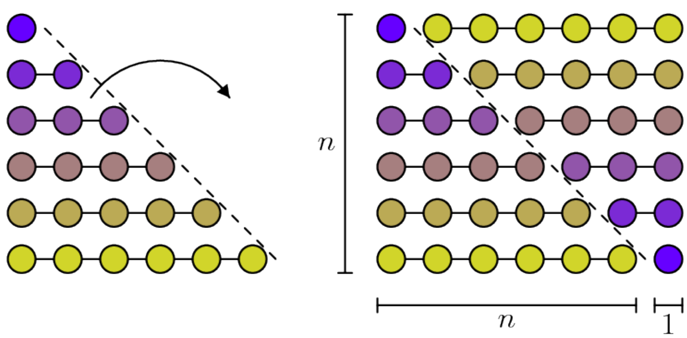
Exercício 1. Um cometa vista a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem foi em 1986. Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Exercício 2. Argumentos visuais são excelentes para despertar ideias e fórmulas interessantes em matemática, seguem dois exemplos:

i) a soma dos primeiros n números ímpares pode ser ilustrada com a figura abaixo:



ii) a soma dos n primeiros números naturais pode ser vista como:



A partir das imagens, conclua:

a) qual a fórmula da soma dos n primeiros números ímpares?

b) qual a fórmula da soma dos n primeiros números naturais?

Exercício 3. Prove que:

a) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$

b) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Exercício 4. Calcule o valor das somas a seguir:

a) $S = 5 + 8 + 11 + \ldots + 302$

b) $S = 2 + 10 + 18 + \ldots + 570$

c) $S = -20 - 13 - 6 + 1 + \ldots + 50$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Numa P.A. na qual $a_3 = 17$ e $a_{13} = 87$, qual o valor da soma dos seus 19 primeiros termos?

Exercício 6. Numa progressão aritmética com 21 termos, temos que $a_{11} = 4$. Qual o valor de S_{21}?

Exercício 7. Se, em uma progressão aritmética, a soma dos três primeiros termos é igual a zero, e a soma dos dez primeiros termos é igual a 70, então qual a razão dessa progressão?

Exercício 8. Qual a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 1 e 100?

Exercício 9. A soma dos n primeiros termos de uma PA infinita é dada por: $S_n = 4n^2 - 6n$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Determine o primeiro termo e a razão dessa PA.

Exercício 10. Considere a sequência (a_n), $n \geq 1$ definida como indicado abaixo:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2 + 3 \\
a_3 &= 4 + 5 + 6 \\
a_4 &= 7 + 8 + 9 + 10 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

b) Calcule a_{10}.

c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Exercício 11. Sobre sequências com dígitos repetidos, responda:

a) A sequência 121, 1221, 12221, ... contém todos os números da forma $1\underbrace{222\ldots22}_{n \text{ dígitos } 2}1$. A quantidade de dígitos 2 indica a posição do número na sequência. Por exemplo, o número 122222221 é o sétimo termo da sequência.

i) Dentre os 2009 primeiros termos da sequência, quantos são divisíveis por 3?

ii) Qual é o menor número múltiplo de 1001 da sequência?

b) Considere o número $X = 1,01001000100001\ldots$. (O padrão se mantém, ou seja, a quantidade de zeros entre números uns consecutivos sempre aumenta exatamente uma unidade).

i) Qual é a sua 25^a casa decimal após a vírgula?

ii) Qual é a sua 500^a casa decimal após a vírgula?

iii) O número X é racional ou irracional?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Qual deve ser o número mínimo de termos consecutivos que devemos somar, a partir do primeiro, da sequência

$$(-133, -126, -119, -112, \ldots)$$

para que a soma seja positiva?

Exercício 13. Para cada número natural n, seja S_n a soma dos dez primeiros múltiplos positivos de n. Por exemplo,

$$S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20.$$

Quanto é $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{10}$?

Exercício 14. A fórmula de Polignac enuncia que sendo $n!$ o produto dos n primeiros inteiros positivos e p um primo, então o expoente de p na fatoração em primos de $n!$ é

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x. Para n inteiro positivo, o fatorial de n é $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Não existe n para o qual $n!$ termina em 2015 zeros, mas existe n para o qual n termina em 2016 zeros. Qual o menor valor de n para o qual isso ocorre?

Exercício 15. É possível encontrar 2017 números inteiros positivos distintos, cada um deles um quadrado perfeito, tal que a soma seja também um quadrado perfeito?

Exercício 16. O termo Repunit (número composto apenas por algarismos iguais a 1) deriva da expressão "**rep**eated **unit**" e fui cunhado, em 1966, por Albert H. Beiler no seu livro **Recreations in the Theory of Numbers**. [Fonte: *Wikipédia*]

a) Demonstre que para cada termo da sequência $A = \underbrace{111\ldots111}_{2m}$ e $B = \underbrace{444\ldots444}_{m}$, a soma $A + B + 1$ é um quadrado perfeito.

b) Prove que $\underbrace{111\ldots111}_{4028} = \underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2$.

c) Considere o número de 4028 dígitos

$$X = \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96.$$

Calcule $\sqrt{X}$.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da videoaula)
Podemos escrever a sequência

$$(1986, 1910, 1834, \ldots)$$

na qual se tem a diferença comum $d = -76$. Deseja-se saber qual o maior n tal que $a_n > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\
a_n &= 1986 + (n-1)\cdot(-76) \\
a_n &= 1986 - 76n + 76 \\
a_n &= 2062 - 76n \\
2062 - 76n &> 0 \\
76n &< 2062 \\
n &< 27,131578\ldots
\end{aligned}$$

e para $n = 27$, chegamos a

$$a_{27} = 2062 - 76 \cdot 27 = 10.$$

E obtermos como resposta o ano 10.

Outra forma: Usando a divisão euclideana chegamos a

$$\begin{array}{r|l}
1986 & 76 \\ \cline{2-2}
1976 & 26 \\ \cline{1-1}
10 &
\end{array}$$

E obtemos o ano 10 na resposta.

2. (Imagens retiradas do site Art of Problem Solving)

a) Analisando a figura, concluímos que a soma dos n primeiros números ímpares é numericamente igual à quantidade de pontinhos internos (área) do quadrado reticulado resultante, ou seja, igual a n^2.

b) Podemos supor que a soma dos n primeiros números naturais é numericamente igual à metade da quantidade de pontinhos internos (área) do retângulo resultante, ou seja, igual a $\dfrac{(n+1)\cdot n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Comentário para professores: As soluções utilizadas para a próxima questão não obedecem o rigor matemático necessário, mas são suficientes para a compreensão do conteúdo por estudantes do ensino médio.

3. Partindo da fórmula geral

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

temos que

a) cada membro fica igual a

$$\begin{aligned}
a_1 + a_n &= a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + nd - d \\
a_2 + a_{n-1} &= a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + nd - d \\
a_3 + a_{n-2} &= a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + nd - d \\
&\vdots
\end{aligned}$$

b) Agora, faça $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ e perceba que podemos escrever

$$\begin{array}{rllll}
 & S = a_1 & +a_2 & +\cdots+ & a_n \\
+ & S = a_n & +a_{n-1} & +\cdots+ & a_1 \\ \hline
 & 2S = a_1 + a_n & +a_2 + a_{n-1} & +\cdots+ & a_n + a_1 \\
 & 2S = a_1 + a_n & +a_1 + a_n & +\cdots+ & a_1 + a_n \\
 & 2S = (a_1 + a_n)\cdot n & & & \\
 & S = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} & & &
\end{array}$$

4. Observe a padrão de cada sequência destacando o primeiro termo e a diferença comum (razão), assim será possível calcular o número de termo n e aplica a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

a) Sendo $a_1 = 5$, $d = 3$ e $a_n = 302$, temos

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{1} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{3} \end{array} \qquad \cdots \qquad \begin{array}{r|l} 302 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{100} \end{array}$$

Assim, o quociente destacado disfarça uma contagem de 1 até 100, ou seja, nessa soma há 100 parcelas, $n = 100$. Portanto, aplicando a fórmula ficaremos com

$$\begin{aligned}
S_{100} &= \frac{(5+302)\cdot 100}{2} \\
S_{100} &= 307 \cdot 50 = 15350.
\end{aligned}$$

b) Sendo $a_1 = 2$, $d = 8$ e $a_n = 570$, temos

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 8 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{1} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 8 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{2} \end{array} \qquad \cdots \qquad \begin{array}{r|l} 570 & 8 \\ \cline{2-2} 2 & \boxed{71} \end{array}$$

Assim, o quociente destacado disfarça uma contagem de 0 até 71, ou seja, nessa soma há 72 parcelas, $n = 72$. Portanto, aplicando a fórmula ficaremos com

$$\begin{aligned}
S_{72} &= \frac{(2+570)\cdot 72}{2} \\
S_{72} &= 572 \cdot 36 = 20592.
\end{aligned}$$

c) Sendo $a_1 = -20$, $d = 7$ e $a_n = 50$, temos

$$\begin{array}{r|l} -20 & 7 \\ \cline{2-2} -6 & \boxed{-2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -13 & 7 \\ \cline{2-2} -6 & \boxed{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -6 & 7 \\ \cline{2-2} -6 & \boxed{0} \end{array} \qquad \cdots \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \cline{2-2} 1 & \boxed{7} \end{array}$$

Assim, o quociente destacado disfarça uma contagem de -2 até 7, ou seja, nessa soma há 10 parcelas, $n = 10$. Portanto, aplicando a fórmula ficaremos com

$$\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{(-20+50)\cdot 10}{2} \\
S_{10} &= 30 \cdot 5 = 150.
\end{aligned}$$

5. Podemos escrever que

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_3 + 10d \\ 87 &= 17 + 10d \\ 70 &= 10d \\ d &= 7. \end{aligned}$$

Sendo assim, seguimos com

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ 17 &= a_1 + 2 \cdot 7 \\ a_1 &= 3. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{19} &= a_1 + 18d \\ a_{19} &= 3 + 18 \cdot 7 = 129. \end{aligned}$$

Por fim, chegamos a

$$\begin{aligned} S_{19} &= \frac{(3+129) \cdot 19}{2} \\ S_{19} &= 66 \cdot 19 = 1254. \end{aligned}$$

6. Lembrando que $a_{21} = a_1 + 20d$, teremos que

$$\begin{aligned} S_{21} &= \frac{(a_1 + a_{21}) \cdot 21}{2} \\ S_{21} &= \frac{(a_1 + a_1 + 20d) \cdot 21}{2} \\ S_{21} &= \frac{(2a_1 + 20d) \cdot 21}{2} \\ S_{21} &= (a_1 + 10d) \cdot 21 \\ S_{21} &= (a_{11}) \cdot 21 \\ S_{21} &= 4 \cdot 21 = 84. \end{aligned}$$

7. (Adaptado do vestibular da UEFS (BA))
Do enunciado, temos que
$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ S_{10} = 70 \end{cases}$ Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d &= 0 \\ 3a_1 + 3d &= 0 \\ a_1 + d &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{10} &= 70 \\ \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} &= 70 \\ (a_1 + a_1 + 9d) \cdot 5 &= 70 \\ 2a_1 + 9d &= 14. \end{aligned}$$

E resolvendo esse sistema chegaremos a $d = 2$.

8. Observe que $a_1 = 7$, $d = 7$ e que

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \hline 2 & \boxed{14} \end{array}$$

a divisão de 100 por 7 deixa resto 2, assim $a_{14} = 98$. Fazendo agora a soma, temos

$$\begin{aligned} S_{14} &= \frac{(a_1 + a_{14}) \cdot 14}{2} \\ S_{14} &= (7 + 98) \cdot 7 = 735. \end{aligned}$$

9. Perceba que $S_1 = a_1$ e do enunciado

$$S_1 = 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -2.$$

e $S_2 = a_1 + a_2$ ou ainda

$$S_2 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 4.$$

O que permite concluir que $a_2 = 6$ e $d = 8$.

10. (PROFMAT)

a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos anteriores mais um, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Primeiro} &= 1 + 2 + ... + n - 1 + 1 \\ &= \frac{(1 + n - 1)(n-1)}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2}. \end{aligned}$$

E cada a_n possui n parcelas, com diferença de uma unidade entre elas, portanto o último inteiro é esse número mais $n - 1$, que fica igual a

$$\text{Último} = \frac{(1 + n - 1)(n-1)}{2} + 1 + n - 1 = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Portanto, para $n = 10$, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

b) Observe que $a_{10} = 46 + 47 + 48 + \cdots + 55$ e podemos calculá-lo como a soma de 10 termos em uma P.A., ou seja, $a_{10} = \dfrac{(46+55) \cdot 10}{2} = 505$.

c) Perceba que a_n é a soma de n inteiros consecutivos começando em $\dfrac{n^2 - n + 2}{2}$ e terminando em $\dfrac{n^2 + n}{2}$. Substituindo na fórmula da soma da P.A. ficamos com

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\ &= \frac{\left(\dfrac{n^2 - n + 2}{2} + \dfrac{n^2 + n}{2}\right) n}{2} \\ &= \frac{(n^2 + 1)n}{2} \\ S_n &= \frac{n^3 + n}{2} \end{aligned}$$

11. (OBM)

a) i) Um número divisível por 3 tem a soma de seus algarismos como múltiplo de 3. Assim, o primeiro termo múltiplo de 3 é 1221, pois $1+2+2+1=6$. O próximo precisará de mais três algarismos 2. Então, para saber quantos múltiplos de 3 escritos dessa forma existem até n, fazemos: $\dfrac{n-2}{3}+1$ Sendo $n=2009$, fica: $\dfrac{2009-2}{3}+1=670$

ii) Vejamos inicialmente que 1001 divide

$$1001\cdot 100+1001\cdot 10+1001=\underbrace{11\ldots 1}_{\text{seis uns}},$$

logo, dividirá também $111111+10\cdot 111111=1222221$. Calculando o resto dos termos anteriores por 1001, podemos concluir que ele é o menor múltiplo procurado.

b) i) Basta somarmos os blocos $0\ldots 01$, ficando com

$$2+3+4+5+6=20 \text{ casas decimais,}$$

daí teremos um bloco de seis zeros e a 25^a casa decimal é ocupado com um zero.

ii) Um grupo de k zeros é separado de um grupo seguinte de $k+1$ zeros por exatamente um número 1. Assim, contando até o dígito 1 que sucede um grupo de k zeros, temos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{\text{algarismos zeros}}+\underbrace{k}_{\text{algarismos uns}}=\frac{k(k+3)}{2}.$$

Se $k=30$, já teremos $\dfrac{30(33)}{2}=495$. Consequentemente a 500^a casa decimal vale *zero*, pois está no grupo com 31 zeros.

iii) O número X não é racional porque sua representação decimal não é periódica uma vez que a quantidade de algarismos zeros entre dois 1's consecutivos sempre está aumentando.

12. Temos que $a_{=}-133$ e $d=7$. Assim,

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$
$$S_n=\frac{(a_1+a_1+(n-1)\cdot d)\cdot n}{2}$$
$$S_n=\frac{(2\cdot(-133)+7n-7)\cdot n)\cdot n}{2}$$
$$S_n=\frac{(-259+7n)\cdot n}{2}>0$$
$$7n^2-259n>0.$$

E o mínimo n para que essa inequação tenha solução com n inteiro não-negativo é $n=40$

13. Vamos calcular todos elementos da sequência proposta:

$$\begin{aligned}S_1&=1+2+3+\ldots+10\\ S_1&=55;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2&=2+4+6+\ldots+20\\ &=2(1+2+3\ldots+10)\\ &=2S_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_3&=3+6+9+\ldots+30\\ &=3(1+2+3\ldots+10)\\ &=3S_1\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}S_{10}&=10+20+30+\ldots+100\\ &=10(1+2+3\ldots+10)\\ &=10S_1\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{10}&=\\ S_1+2S_2+3S_1+\ldots+10S_1&=\\ (1+2+3\ldots+10)S_1&=\\ S_1\cdot S_1&=\\ &=55^2=3025.\end{aligned}$$

14. (Adaptado da OBM)

Ao escrevermos $n!=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot\ldots$, sempre teremos $\alpha_1>\alpha_3$, e assim, para determinarmos a quantidade de zeros com que termina $n!$ só precisamos calcular α_3.Agora, perceba que para $n!$ terminar em exatos 2016 zeros, pela fórmula de Polignac, devemos ter

$$\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{5^3}\right\rfloor+\cdots=2016.$$

Como $\lfloor x\rfloor\le x$, temos $\left\lfloor\dfrac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n}{p^3}\right\rfloor+\cdots\le\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{p^2}+\dfrac{n}{p^3}+\cdots=\dfrac{\frac{n}{p}}{1-\frac{1}{p}}=\dfrac{n}{p-1}$, e nesse caso, $p=5$ e $2016\le\dfrac{n}{5-1}$ e $n\ge 8064$.
Para $n=8064$, temos novamente pela fórmula de Polignac,

$$\left\lfloor\frac{8064}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{8064}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{8064}{5^3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{8064}{5^4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{8064}{5^5}\right\rfloor=2012,$$

Podemos parar em 5^5, pois $\left\lfloor\dfrac{8064}{5^n}\right\rfloor=0$, para n natural maior do que ou igual a 6.
A soma aumenta uma unidade, quando n é múltiplo de 5, mas não de 25, e aumenta duas unidades quando n é múltiplo de 25, mas não de 125 e assim sucessivamente. Assim, para $n=8065$, a soma valerá 2013. Para $n=8070$, a soma valerá 2014. Por outro lado, como 8075 é múltiplo de 25, a soma saltará de 2014 para 2016. Com isso, o menor valor de n para o qual $n!$ termina em 2016 zeros é 8075.

15. (Baltic Way)
Basta iniciarmos pelo "Terno Pitagórico" $(3, 4, 5)$ e a identidade $3^2 + 4^2 = 5^2$. Agora, multipliquemos a equação toda por 5^2 ficando com $3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$, que é o mesmo que $3^2 \cdot (3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$ ou $3^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 4^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$, repitamos o procedimento da multiplicação por 5^2 para obtermos $3^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$ que é o mesmo $3^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2 + 4^2) + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$ ou $3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2$, podemos reiterar esse raciocínio por outras 2013 vezes ($2 + 2013 = 2015$ no total) para obtermos no membro da esquerda 2017 parcelas (quadrados perfeitos), cuja soma será $5^{2 \cdot 2016} = \left(5^{2016}\right)^2$, um quadrado perfeito. ∎

16.

a) **(Adaptado da Olimpíada da Rússia)**

Observe que $\underbrace{11...11}_{2m} = \dfrac{10^{2m} - 1}{9}$, pois

$$\underbrace{11\ldots11}_{k} = 10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10^1 + 10^0 = \frac{10^k - 1}{9}.$$

Assim, temos

$$\underbrace{44\ldots44}_{m} = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{m} = 4 \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right).$$

O que gera

$$\begin{aligned} A + B + 1 &= \\ \frac{(10^m + 1)(10^m - 1)}{9} + 4 \cdot \frac{(10^m - 1)}{9} + \frac{9}{9} &= \\ \frac{10^{2m} - 1 + 4 \cdot 10^m - 4 + 9}{9} &= \\ \frac{(10^m)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10^m + 2^2}{9} &= \\ = \left(\frac{10^m + 2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Como o número $10^m + 2$ é múltiplo de 3, pois a soma dos algarismo é um múltiplo de 3 (verifique!), a expressão é um quadrado perfeito.

b) Veja que

$$\begin{aligned} \underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2 &= \\ \left(2 \cdot \frac{10^{2014} - 1}{9}\right) + \left(3 \cdot \frac{10^{2014} - 1}{9}\right)^2 &= \\ \frac{18(10^{2014} - 1)}{81} + \frac{9 \cdot 10^{4028} - 18 \cdot 10^{2014} + 9}{81} &= \\ = \frac{9(10^{4028} - 1)}{81} = \frac{10^{4028} - 1}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{4028}. \end{aligned}$$

c) **(Adaptado do IME)**

$$\begin{aligned} X &= \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96 \\ &= \underbrace{1\ldots1}_{2013} \cdot 10^{2015} + 2 \cdot 10^{2014} + \underbrace{8\ldots8}_{2014} + 8 \\ &= \frac{10^{2013} - 1}{9} \cdot 10^{2015} + 2 \cdot 10^{2014} + 8 \cdot \frac{10^{2014} - 1}{9} + 8 \\ &= \frac{10^{4028} - 10^{2015} + 18 \cdot 10^{2014} + 8 \cdot 10^{2014} - 8 + 9 \cdot 8}{9} \\ &= \frac{10^{4028} + 16 \cdot 10^{2014} + 64}{9} \\ &= \left(\frac{10^{2014} + 8}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{X} &= \frac{10^{2014} + 8}{3} \\ &= \frac{10^{2014} - 1}{3} + 3 \\ &= \underbrace{333\ldots333}_{2014} + 3 \\ &= \underbrace{333\ldots333}_{2013}6. \end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com