Módulo Elementos Básicos de Geometria - Parte 3

Circunferência.

8° **ano/E.F.**

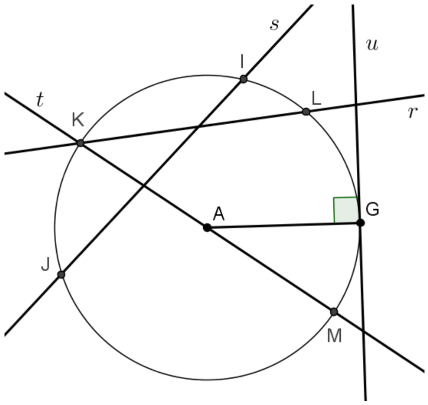
Professores: Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Elementos Básicos de Geometria - Parte 3.
Circunferência.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Observe a figura abaixo e responda:



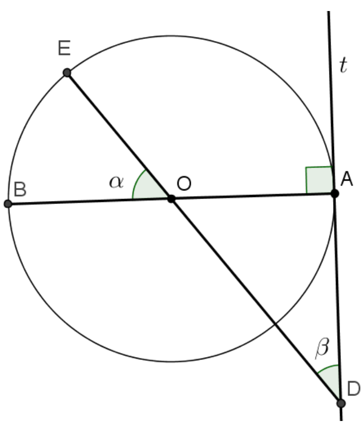
a) Quais retas são secantes à circunferência?

b) Quais são as cordas na circunferência?

c) Qual corda representa o diâmetro da circunferência?

d) Qual a reta tangente à circunferência?

Exercício 2. Na figura, a reta t é tangente à circunferência e O é seu centro. Determine $\alpha + \beta$.



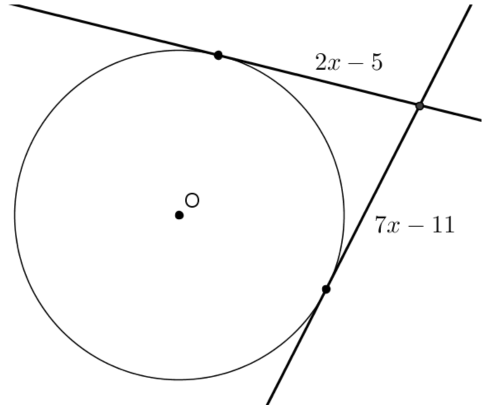
Exercício 3. São dadas duas circunferências de raios $r_1 = 10cm$ e $r_2 = 22cm$. Determine a distância d entre seus centros para que as circunferências sejam:

a) tangentes externamente.

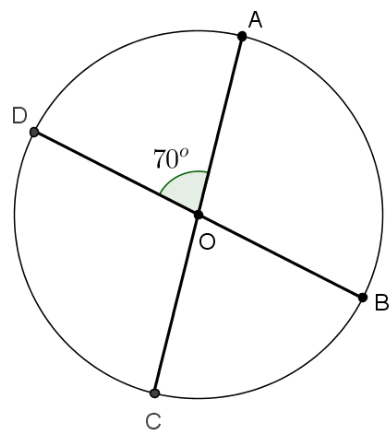
b) tangentes internamente.

c) secantes.

Exercício 4. Na figura abaixo, as duas retas são tangentes à circunferência. Determine o valor de x.



Exercício 5. Na figura, O é o centro da circunferência. Determine:



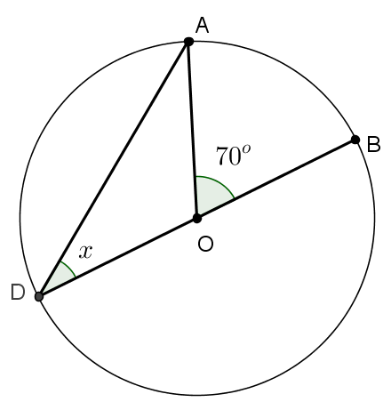
a) a medida do menor arco $\widehat{AB}$.

b) a medida de $\angle DOC$.

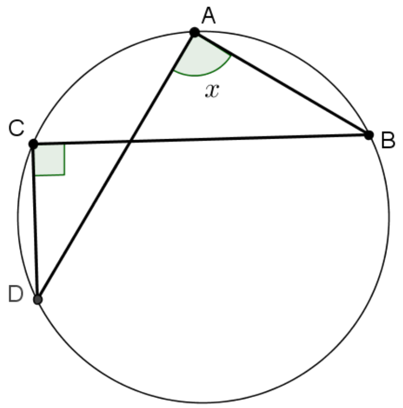
c) a medida do arco $\widehat{ABC}$.

2 Exercícios de Fixação

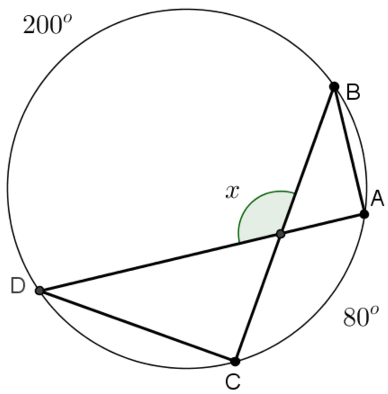
Exercício 6. Determine o valor de x nas figuras abaixo.



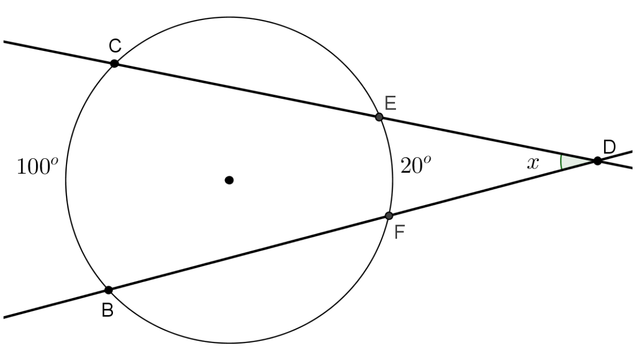
a)



b)

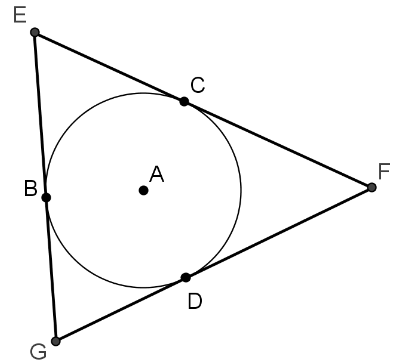


c)

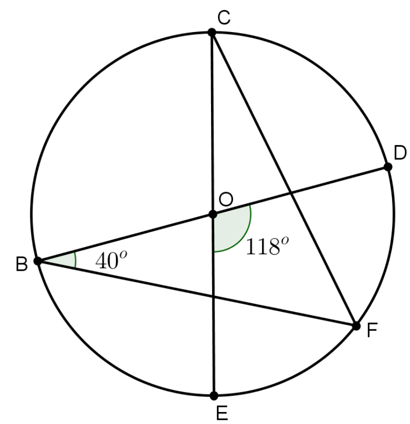


d)

Exercício 7. Na figura abaixo, temos uma circunferência inscrita ao triângulo EFG. Determine a medida do lado EF, sabendo que $BE = 8cm$ e $DF = 9cm$.

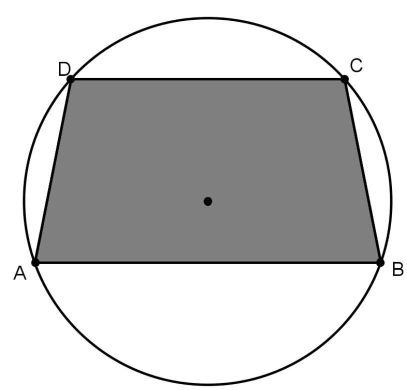


Exercício 8. Determine $\angle ECF$, na figura abaixo, sendo O o centro da circunferência.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 9. Na figura, $ABCD$ é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede $16cm$, a base menor $10cm$ e a altura $9cm$. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?



a) $\dfrac{7}{3}$.

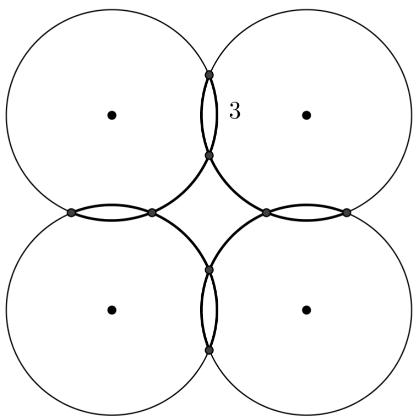
b) $\dfrac{25}{3}$.

c) $\dfrac{35}{3}$.

d) $\dfrac{40}{3}$.

e) $\dfrac{50}{3}$.

Exercício 10. Quatro circunferências de mesmo raio estão dispostas como na figura, determinando doze pequenos arcos, todos de comprimento 3. Qual é o comprimento de cada uma dessas circunferências?



a) 18.

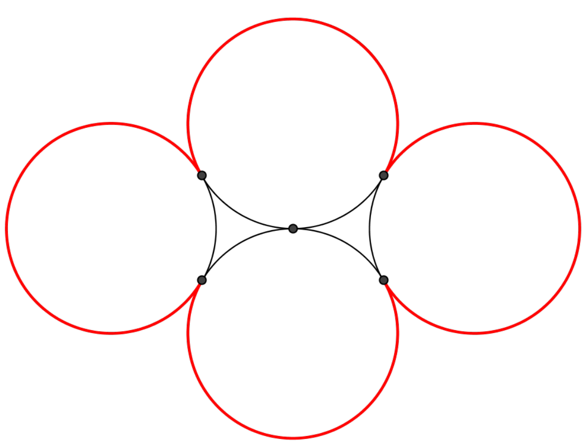
b) 20.

c) 21.

d) 22.

e) 24.

Exercício 11. A figura mostra quatro circunferências, todas de comprimento 1 e tangentes nos pontos indicados. Qual é a soma dos comprimentos dos arcos destacados em vermelho?



a) $\dfrac{3}{2}$.

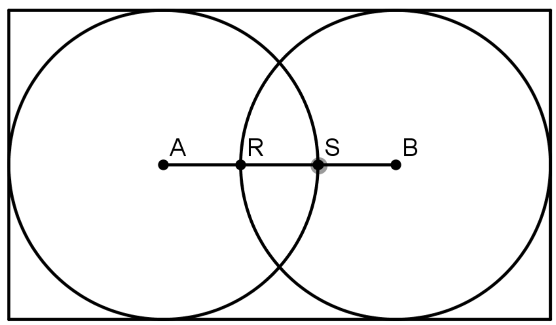
b) 2.

c) $\dfrac{9}{4}$.

d) $\dfrac{8}{3}$.

e) 3.

Exercício 12. Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a $4cm$. A distância entre os pontos R e S é $1cm$. Qual é o perímetro do retângulo?



a) $16cm$.

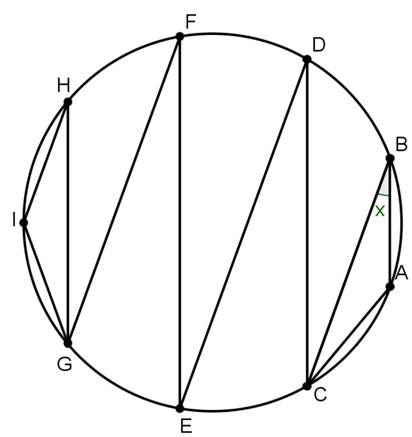
b) $18cm$.

c) $20cm$.

d) $22cm$.

e) $24cm$.

Exercício 13. Considere a figura, onde os pontos de A até I estão sobre uma circunferência. Sabe-se que $\triangle ABC$ e $\triangle GHI$ são isósceles, que AB, CD, EF e GH são segmentos paralelos e que BC, DE, FG e HI são segmentos paralelos. Qual a medida do ângulo x em graus?



a) 15^o.

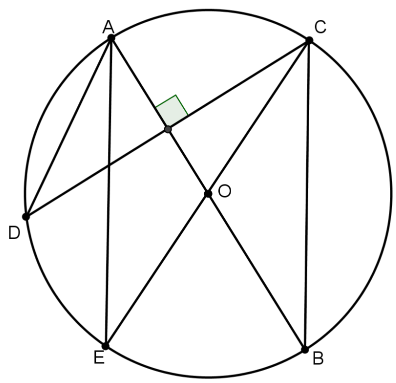
b) 20^o.

c) 30^o.

d) 40^o.

e) 45^o.

Exercício 14. Na figura o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35^o$ o valor em graus do ângulo $\angle DAE$ é:



a) 35^o.

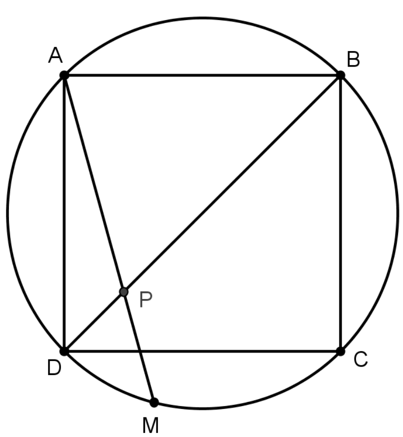
b) 10^o.

c) 20^o.

d) 30^o.

e) 55^o.

Exercício 15. O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda AM intercepta a diagonal BD no ponto P. Se o segmento AM mede 50, determine a medida do segmento AP.



Respostas e Soluções.

1.

a) r, s, t.

b) os segmentos KL, KM e JI.

c) o segmento KM.

d) u.

2. $\angle AOD = \angle EOB = \alpha$, pois são opostos pelo vértice. Somando os ângulos internos do triângulo $\triangle AOD$, temos que $\alpha + \beta + 90^o = 180^o$, segue que $\alpha + \beta = 90^o$.

3.

a) $d = r_1 + r_2$, segue que $d = 32cm$.

b) $d = \mid r_1 - r_2 \mid$, segue que $d = 12cm$.

c) $\mid r_1 - r_2 \mid < d < r_1 + r_2$, segue que $12cm < d < 32cm$.

4.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 7x - 11 \\ 2x - 7x &= -11 + 5 \\ -5x &= -6 \\ x &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

5.

a) a medida de $\widehat{AB}$ é igual à medida do ângulo central $\angle AOB$, que mede $180^o - 70^o = 110^o$.

b) $\angle DOC = 180^o - 70^o = 110^o$.

c) $\widehat{ABD} = 360^o - 70^o = 290^o$.

6.

a) Como $\angle ADB$ é ângulo inscrito e $\angle AOB$ é ângulo central ambos "olhando"para o mesmo arco, temos $\angle ADB = \dfrac{\angle AOB}{2}$, segue que $x = 35^o$.

b) Como $\angle DCB$ e $\angle DAB$ são ângulos inscritos "olhando"para o mesmo arco, então eles são congruentes, ou seja, $x = 90^o$.

c) $x = \dfrac{200^o + 80^o}{2} = 140^o$, já que se trata de um ângulo excêntrico interno.

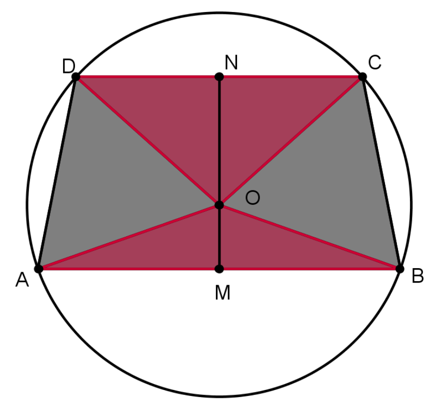
d) $x = \dfrac{100^o - 20^o}{2} = 40^o$, já que se trata de um ângulo excêntrico externo.

7. Como BE e EC são segmentos tangentes à circunferência, com uma extremidade comum, então são congruentes, ou seja, $EC = BE = 8cm$. De forma análoga, $CF = DF = 9cm$. Temos então que $EF = 8 + 9 = 17cm$.

8. $\angle ECF = \dfrac{\angle EOD}{2} - \angle FBD = 59^o - 40^o = 19^o$.

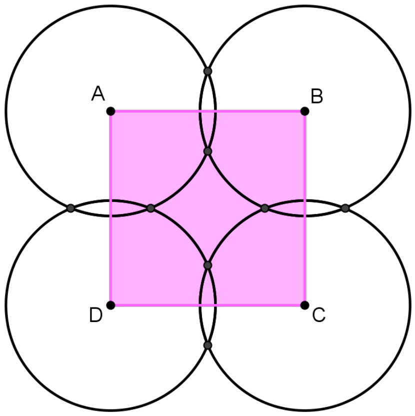
9. (Extraído da OBMEP - 2015)

Seja O o centro da circunferência, OM a altura do triângulo OAB relativa à base AB e ON a altura do triângulo OCD relativa à base CD. Como AB paralelo à CD, segue que os pontos M, O e N estão alinhados e que MN é a altura do trapézio. Vamos denotar $OA = OB = OC = OD = r$, $OM = x$ e $ON = y$. A altura do trapézio é, assim, igual a $x + y = 9cm$. Como o triângulo OAB é isósceles com base $AB = 16cm$, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que $r^2 = 8^2 + x^2$. De forma análoga, $r^2 = 5^2 + y^2$. Subtraindo as equações, obtemos $(y + x)(y - x) = 39$.

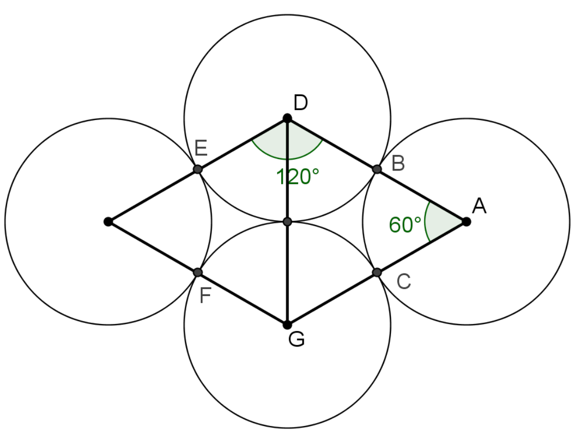


Usando a única possibilidade que resulta em valores positivos, temos $x + y = 9$ e $y - x = \dfrac{13}{3}$, segue que $x = \dfrac{7}{3}$ e $y = \dfrac{20}{3}$. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, chegamos a $r = \dfrac{25}{3}$. Resposta B.

10. (Extraído da OBMEP - 2014) Devido às simetrias presentes na figura, podemos construir o quadrado $ABCD$, com vértices situados nos centros de cada uma das circunferências, conforme a figura. Observamos que em cada circunferência, os dois lados do quadrado que saem do centro dela determinam um arco cujo comprimento é $\dfrac{3}{2} + 3 + \dfrac{3}{2} = 6$, sendo essa medida a quarta parte do comprimento de cada circunferência. Logo, o comprimento de cada circunferência é 24.



11. (Extraído da OBMEP - 2013)
Seja r o raio comum das circunferências. Unindo os centros A, D e G de três das circunferências, como na figura, e lembrando que a reta que passa pelos centros de duas circunferências tangentes passa também pelo ponto de tangência, vemos que $\triangle ADG$ é equilátero, pois todos seus lados medem $2r$. Logo todos seus ângulos medem 60^o; em particular, o ângulo central $\widehat{BAC}$ mede 60^o. Segue que o arco $\widehat{BC}$ corresponde ao ângulo central de $60^o = \frac{1}{6}360^o$, ou seja, esse arco mede $\frac{1}{6}$ do comprimento da circunferência, que é $\frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$; esse também é o comprimento do arco $\widehat{EF}$. Já o arco $\widehat{BE}$ corresponde a um ângulo central de 120^o; seu comprimento é então duas vezes o de um arco correspondente a 60^o, ou seja, é $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, que é também o comprimento do arco $\widehat{CF}$. Desse modo, o comprimento total dos arcos pretos é $2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$; como a soma dos comprimentos das circunferências é 4, o comprimento dos arcos vermelhos é $4 - 1 = 3$. Resposta E.



12. (Extraído da OBMEP) O comprimento do retângulo mede $2 \cdot 4 - 1 = 7cm$, já que o segmento RS é contado duas vezes quando somamos os dois diâmetros. E como a altura do retângulo tem a mesma medida do diâmetro de uma das circunferências, seu perímetro é $2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 22cm$. Resposta D.

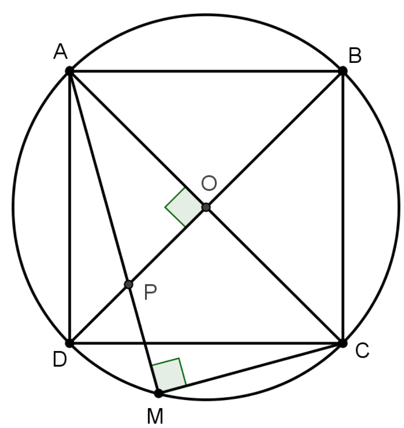
13. (Extraído da OBM - 2014) Como todo o trapézio inscritível é isósceles e os triângulos mencionados também o são, temos as igualdades entre os arcos determinados pelas seguintes cordas:

$$AB = AC = BD = CE = DF = EG = FH = IG = IH.$$

Esses 9 arcos iguais determinam a medida de $\frac{360^o}{9} = 40^o$. Portanto, o ângulo x mede $\frac{40^o}{2} = 20^o$. Resposta B.

14. (Extraído da OBM - 2013) Como O é o centro do círculo, temos $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^o$. Como $AO = OE$, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo $\angle EOB$, temos $\angle EAO = \angle OEA = 35^o$. Daí, $\angle ADC = \angle AEC = 35^o$. Como $\angle ADC + \angle DAB = 90^o$, podemos concluir que $\angle DAE = 90^o - \angle ADC - \angle EAB = 20^o$. Resposta C.

15. (Extraído da OBM - 2013) Trace a diagonal AC que intersecta DB no ponto O. Sendo $ABCD$ um quadrado, O é o centro da circunferência. Observe que $\angle CMA = 90^o$ e $\angle POA = \angle DOA = 90^o$. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e ACM são semelhantes e, portanto:
$\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{AP}{60} = \frac{30}{50} \Leftrightarrow AP = 36.$



Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com