Derivada como Função

Exercícios

Introdução ao Cálculo

Portal da Matemática
OBMEP

Derivada como Função
Exercícios

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $f(x) = 30x + 34$, calcule pela definição o valor de $f'(64)$.

Exercício 2. Se $f(x) = 10x + 17$, calcule pela definição o valor de $f'(27)$.

Exercício 3. Se $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, calcule pela definição o valor de $f'(1)$.

Exercício 4. Se $f(x) = \dfrac{1}{x+12}$, calcule pela definição o valor de $f'(1)$.

Exercício 5. Se $\dfrac{dy}{dx} = 12x + 9$ e $y(x) = ax^2 + bx + c$, calcule o valor de a.

Exercício 6. Se $f(x) = x^3 + 30x^2 + 34$, determine pela definição o valor de $f''(1)$.

Exercício 7. Se $f(x) = x^3 + 12x^2 + 17$, determine pela definição o valor de $f''(1)$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Se $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = cx^n$, determine a função $f'(x)$.

Exercício 9. Se $n > 1$ e $f(x) = x^n$, determine a função $f''(x)$.

Exercício 10. Verifique que

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a),$$

ou seja, multiplicar uma função por uma constante altera a derivada pelo mesmo fator multiplicativo.

Exercício 11. Encontre uma função $f(x)$ tal que $f''(x) = 3x^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Calcule

$$S = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)^2 - (x^3+1)}{x-2}.$$

Exercício 13. Calcule

$$S = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1}.$$

Exercício 14. Calcule

$$S = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^4 - \sqrt{x+1}}{x}.$$

Exercício 15. Supondo que f e g são deriváveis em a, verifique pela definição que

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Exercício 16. Supondo que f e g são deriváveis em a, verifique pela definição que

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Exercício 17. Se $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}$, determine a expressão da função $f'(x)$.

Exercício 18. Se $y(x) = g(x)^3$ e g é derivável em a, verifique que

$$y'(a) = 3g(a)^2 \cdot g'(a)$$

Exercício 19.

a) Determine a e b de modo que $f(x) = ax + b$ satisfaça $f'(1) = 1$ e $f(1) = 3$.

b) Encontre uma função $y(x)$ tal que $y''(0) = 2$, $y'(0) = 2$ e $y(0) = 3$.

Exercício 20.

a) Se $f(x) = (x+1)^n$, encontre pela definição o valor de $f'(1)$.

b) Conclua que

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Respostas e Soluções.

1. Temos

$$\begin{aligned} f'(64) &= \lim_{x\to 64} \frac{f(x)-f(64)}{x-64} \\ &= \lim_{x\to 64} \frac{30(x-64)}{x-64} \\ &= 30. \end{aligned}$$

2. Temos

$$\begin{aligned} f'(27) &= \lim_{x\to 27} \frac{f(x)-f(27)}{x-27} \\ &= \lim_{x\to 27} \frac{10(x-27)}{x-27} \\ &= 10. \end{aligned}$$

3. Temos

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{4}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-(x-1)}{4(x+3)}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} -\frac{1}{4(x+3)} \\ &= -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

4. Temos

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x+12}-\frac{1}{13}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-(x-1)}{13(x+12)}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} -\frac{1}{13(x+12)} \\ &= -\frac{1}{169} \end{aligned}$$

5. Temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(p) &= \lim_{x\to p} \frac{y(x)-y(p)}{x-p} \\ &= \lim_{x\to p} \left(\frac{a(x^2-p^2)+b(x-p)}{x-p}\right) \\ &= \lim_{x\to p} (a(x+p)+b) \\ &= 2ap+b \end{aligned}$$

Como $2a = 12$, segue que $a = 6$.

6. Temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x^3-a^3)+30(x^2-a^2)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} ((x^2+ax+a^2)+30(x+a)) \\ &= 3a^2+60a \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 3x^2 + 60x$. Daí

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{3(x^2-a^2)+60(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} 3(x+a)+60 \\ &= 6a+60 \end{aligned}$$

Assim, $f''(1) = 66$.

7.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x^3-a^3)+12(x^2-a^2)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} ((x^2+ax+a^2)+12(x+a)) \\ &= 3a^2+24a \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 3x^2 + 60x$. Daí

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{3(x^2-a^2)+24(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (3(x+a)+24) \\ &= 6a+24 \end{aligned}$$

Assim, $f''(1) = 30$.

8. Temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{c(x^n-a^n)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} c(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+a^{n-1}) \\ &= c\cdot nx^{n-1}. \end{aligned}$$

9. Pelo exercício anterior, $f'(x) = nx^{n-1}$. Aplicando mais uma vez esse exercício, agora com $c = n$, temos $f''(x) = n(n-1)x^{n-1}$.

10. Temos

$$\begin{aligned}(cf(x))'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a}\\ &= c\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= c\cdot f'(a)\end{aligned}$$

11. Combinando os dois últimos exercícios, se $f(x)=cx^n$, teremos $f''(x)=cn(n-1)x^{n-2}$. Fazendo $n=4$ e escolhendo $c=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ obteremos o exemplo desejado. Note que existem infinitas funções cuja função derivada é $3x^2$. Por exemplo, $g(x)=\frac{x^4}{4}+k$, sendo k uma constante arbitrária, também satisfaz o desejado.

12. Se $h(x)=(x+1)^2-(x^3+1)$, temos

$$S=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$

Portanto $S=h'(2)$. Como $h'(x)=2(x+1)-3x^2$, temos

$$\begin{aligned}S &= h'(2)\\ &= -6\end{aligned}$$

13. Se $h(x)=x^2-\sqrt{x}$, temos

$$S=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$

Portanto $S=h'(1)$. Como $h'(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, temos

$$\begin{aligned}S &= h'(1)\\ &= 3/2\end{aligned}$$

14. Se $h(x)=(x+1)^4-\sqrt{x+1}$, temos

$$S=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

Portanto $S=h'(0)$. Como $h'(x)=4(x+1)^3-\frac{(1+x)^{-1/2}}{2}$, temos

$$S=h'(0)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

15. Temos

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\ &= f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

16. Como g é derivável em a, segue que $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$. Daí

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)\cdot g(x))-(f(a)\cdot g(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{(f(x)-f(a))g(x)}{x-a}+\frac{f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\right)\\ &= f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).\end{aligned}$$

17. Temos

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}\\ &= \frac{x+1}{x}\\ &= 1+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Portanto $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

18. Como g é derivável em a, segue que $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$. Daí

$$\begin{aligned}y'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{y(x)-y(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(g(x)-g(a))(g(x)^2+g(x)g(a)+g(a)^2)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot(g(x)^2+g(x)g(a)+g(a)^2)\\ &= g'(a)\cdot 3g(a)^2.\end{aligned}$$

19.

a) De $f(1)=3$, podemos concluir que $a+b=3$. Como $f'(1)=a$, segue que $a=1$ e $b=2$.

b) Existem infinitas funções que satisfazem a condição, mas baseado no item anterior tentaremos descobrir a, b e c tais que uma função da forma $y(x)=ax^2+bx+c$ cumpra o desejado. De $y''(0)=1$, deveríamos ter $2a=2$, ou seja, $a=1$. De $y'(0)=2$, teríamos $b=2$. Finalmente, de $y(0)=3$, precisaríamos que $c=3$. É fácil verificar que $y(x)=x^2+2x+3$ satisfaz as condições do enunciado.

20.

a)

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^n-2^n}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sum_{i=0}^{n-1}(x+1)^{n-1-i}\cdot 2^i)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(\sum_{i=0}^{n-1}(x+1)^{n-1-i}\cdot 2^i)\\ &= n\cdot 2^{n-1}.\end{aligned}$$

b) Pelo Binômio de Newton, temos

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$$

Portanto,

$$f'(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i\cdot x^{i-1}$$

Assim, susbtituindo $x=1$, temos

$$
\begin{aligned}
n \cdot 2^{n-1} &= f'(1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x+1)^{n-1-i} \cdot 2^i
\end{aligned}
$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com