Módulo de Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

Discussão de Sistemas de Equações

7° ano E.F.

Professores: Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Plano Cartesiano e Sistemas de Equações
O Plano Cartesiano

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Discuta os sistemas abaixo

a)

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ x - y = 18. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 2x + 2y = 84. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ -3x - 3y = -42. \end{cases}$$

Exercício 2. Construa os gráficos das equações do sistema abaixo para determinar se o sistema é possível determinado, possível indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + 3y &= 7 \\ 2x + 6y &= 15 \end{cases}$$

Exercício 3. Luíza possui cédulas de 1 real, 2 reais e 5 reais, num total de 17 cédulas e 54 reais. Se a quantidade de cédulas de 5 reais é o dobro da quantidade de cédulas de 1 real, determine quantas cédulas de 2 reais Luíza possui.

Exercício 4. Ana e Beatriz têm juntas 15 anos, Ana e Carla têm juntas 17 anos, Beatriz e Carla têm juntas 18 anos. Quantos anos as três têm juntas?

Exercício 5. Discuta o sistema abaixo, segundo os valores de a, ou seja, diga para que valores de a o sistema é possível determinado, possível indeterminado e impossível.

$$\begin{cases} x + y &= a \\ 2x - 3y &= 1 \end{cases}$$

Exercício 6. Se o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

com coeficientes e termos independentes não nulos, não admite solução, que relações podemos estabelecer entre os seus coeficientes?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Discuta o sistema

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m. \end{cases}$$

Exercício 8. Qual o valor de m que torna o sistema linear

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + mz = 0 \end{cases}$$

indeterminado?

Exercício 9. Discuta o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3. \end{cases}$$

Exercício 10. Análise o gráfico abaixo e depois responda o que se pede:

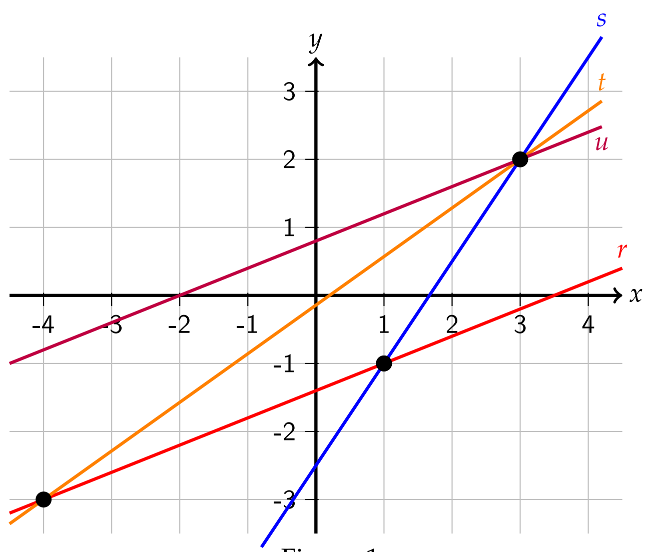


Figura 1

a) qual a solução do sistema que relaciona as retas r e s?

b) qual a solução do sistema que relaciona as retas r e t?

c) qual a solução do sistema que relaciona as retas s e t?

d) qual a solução do sistema com as retas r, s e t?

e) qual a solução do sistema que relaciona as retas r e u?

f) qual a solução do sistema com as retas s, t e u?

g) a reta $v : 10y - 4x + 14 = 0$ se representada no gráfico seria paralela a quais outras retas já desenhadas?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Calcule o valor de h de modo que o sistema

$$\begin{cases} 2x - hy = 6 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

seja possível e indeterminado.

Exercício 12. Qual a relação entre a e b para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ ax + by = 5, \end{cases}$$

admita uma única solução?

Exercício 13. O sistema linear

$$\begin{cases} x - y = p \\ px + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

nas incógnitas x e y é possível e determinado apenas para n valores distintos de p, qual o valor de n?

Respostas e Soluções.

1.

a)

$$\begin{cases} x+y=42 \\ x-y=18. \end{cases}$$

Podemos somar as duas equações e obtermos $2x = 60$, ou seja, $x = 30$. Substituindo em qualquer uma das equações iniciais, ficamos com $y = 12$. Esse é um sistema possível e determinado, as retas que representam cada equação se cruzam no plano cartesiano em exatamente um ponto.

b)

$$\begin{cases} x+y=42 \\ 2x+2y=84. \end{cases}$$

Podemos dividir a segunda equação por 2 obtendo o sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y=42 \\ x+y=42. \end{cases}$$

Como as duas equações são iguais, esse sistema é possível e indeterminado, isto é, não possui um conjunto finito de soluções. Sua representação no plano cartesiano é dada pela reta de equação $x + y = 42$.

c)

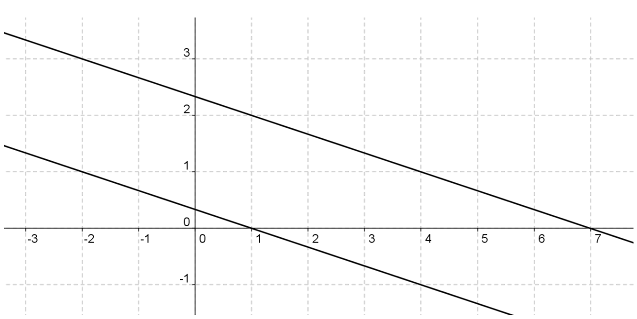
$$\begin{cases} x+y=42 \\ -3x-3y=-42. \end{cases}$$

Podemos multiplicar a primeira equação por 3 obtendo o sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x+3y=126 \\ -3x-3y=-42. \end{cases}$$

Agora, somando-as, obtemos $0 = 84$. Esse absurdo mostra que essas duas equações não possuem uma solução comum. Então, esse sistema é impossível e sua representação no plano cartesiano se dá por um par de retas paralelas.

2.



Como as retas são paralelas, o sistema é impossível.

3. Vamos chamar a quantidade de cédulas de 1 real de u, a quantidade de cédulas de 2 de d e a quantidade de cédulas de 5 de c. Transformando as informações em equações, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} u+d+c=17 \\ u+2d+5c=54 \\ c=2u \end{cases}$$

Substituindo a última equação nas duas primeiras, obtemos um novo sistema:

$$\begin{cases} 3u+d=17 \\ 11u+2d=54 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-2), chegamos ao sistema equivalente:

$$\begin{cases} -6u-2d=-34 \\ 11u+2d=54 \end{cases}$$

Somando estas duas últimas equações, obtemos $5u = 20$, ou seja, $u = 4$. Como a quantidade de cédulas de 5 reais é o dobro das de 1, $c = 8$. Além disso, sabemos que o total de cédulas é 17, portanto, a quantidade de cédulas de 2 é $d = 17 - 4 - 8 = 5$.

4. Vamos chamar as idades de Ana, Beatriz e Carla, respectivamente, de a, b e c. Como são três informações, teremos três equações no nosso sistema.

$$\begin{cases} a+b=15 \\ a+c=17 \\ b+c=18 \end{cases}$$

Podemos facilmente resolver este sistema, porém, o solicitado no exercício não são as idades de cada uma, e sim a soma das três idades. Sendo assim, vamos somar as três equações do sistema. Temos então $2a + 2b + 2c = 50$ e daí segue que $a + b + c = 25$.

5. Pela primeira equação, temos que $y = a - x$. Substituindo este resultado na segunda, chegamos a:

$$\begin{aligned} 2x - 3(a - x) &= 1 \\ 2x - 3a + 3x &= 1 \\ 5x &= 3a + 1 \\ x &= \frac{3a+1}{5}. \end{aligned}$$

Perceba que, independente do valor de a, x será um número real e, por consequência, y também será. Sendo assim, para qualquer valor de a o sistema é possível determinado.

6. A partir de

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ dx + ey &= f, \end{cases}$$

podemos multiplicar a primeira equação por $d \neq 0$ e a segunda por $(-a) \neq 0$ ficando com o sistema equivalente

$$\begin{cases} adx + bdy &= cd \\ -adx - aey &= -af. \end{cases}$$

Somando-as, teremos

$$\begin{aligned} bdy - aey &= cd - af \\ (bd - ae)y &= cd - af \end{aligned}$$

Por fim, como o sistema não admite solução (ou seja, é impossível), então $bd - ae = 0$ e $cd - af \neq 0$.

7. (Adaptado do vestibular da Fuvest $-$ 2015)
Subtraindo a segunda equação da terceira, teremos

$$\begin{aligned} x + z - y - z &= m - 1 \\ x - y &= m - 1. \end{aligned}$$

Agora, subtraindo essa equação da primeira ficaremos com

$$\begin{aligned} ax - y - x + y &= 1 - m + 1 \\ ax - x &= 2 - m \\ (a-1)x &= 2 - m. \end{aligned}$$

Temos os seguintes casos:

- Se $a = 1$ e $m = 2$ o sistema é possível e indeterminado;
- Se $a = 1$ e $m \neq 2$ o sistema é impossível; e
- Se $a \neq 1$ o sistema é possível e determinado;

8. (Adaptado do vestibular da ACAFE $-$ 2014)
Somando a primeira e a terceira equações teremos

$$\begin{aligned} -x + 2y + x + mz &= 0 \\ 2y + mz &= 0. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a primeira por 2 e somando o resultado obtido com a segunda obtemos

$$\begin{aligned} -2x + 4y + 2x + z &= 0 \\ 4y + z &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, multiplicando a equação $2y + mz = 0$ por (-2) e somando com o último resultado chegaremos a

$$\begin{aligned} 4y + z - 4y - 2mz &= 0 \\ (1 - 2m)z &= 0. \end{aligned}$$

O sistema é indeterminado se $1 - 2m = 0$, ou seja, $m = \dfrac{1}{2}$.

9. (Adaptado do vestibular da UFMG $-$ 2013)
Devemos multiplicar a primeira por (-3) e somar o resultado obtido com a segunda, ou seja,

$$\begin{aligned} 6x + ay - 6x - 9y &= 3 - 6 \\ ay - 9y &= -3 \\ (a - 9)y &= -3. \end{aligned}$$

Então, para que o sistema tenha solução, precisamos de $a \neq 9$. Para o outro valor, $a = 9$, o sistema é indeterminado.

10. Observando o gráfico temos que:

a) as retas r e s se cruzam no ponto $(1, -1)$, portanto o conjunto solução do sistema que as relaciona é $S = \{(1, -1)\}$.

b) as retas r e t se intersectam no ponto $(-4, 3)$, portanto o conjunto solução do sistema que as relaciona é $S = \{(-4, 3)\}$.

c) as retas s e t se intersectam no ponto $(3, 2)$, então a solução desse sistema é $S = \{(3, 2)\}$.

d) como as retas r, s e t não se cruzam no mesmo ponto, o sistema é impossível e o conjunto solução é vazio, isto é, $S = \emptyset$.

e) como as retas r e u são paralelas, então o sistema é impossível e o conjunto solução é vazio, isto é, $S = \emptyset$.

f) as retas s, t e u se cruzam no ponto $(3, 2)$. Daí, o sistema é possível e determinado e a solução é $S = \{(3, 2)\}$.

g) Perceba que os pontos $(-4, -3)$ e $(1, -1)$ pertencem à reta v, logo $v = r$. Então v e r formam um sistema possível e indeterminado (retas paralelas coincidentes). Temos que v também é paralela a u, só que agora formando um sistema possível e indeterminado (retas paralelas distintas).

11. Podemos multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por (-2) obtendo

$$\begin{cases} 6x - 3hy & = & 18 \\ -6x - 4y & = & -18. \end{cases}$$

Agora, somando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} 6x - 3hy + (-6x - 4y) &= 18 + (-18) \\ 6x - 3hy - 6x - 4y &= 18 - 18 \\ -3hy - 4y &= 0 \\ (-3h - 4)y &= 0. \end{aligned}$$

Para que esse sistema seja indeterminado, devemos ter $-3h - 4 = 0$, ou seja, $h = -\dfrac{4}{3}$.

12. Multiplicando a primeira equação por a e a segunda por (-1), obteremos o sistema equivalente ao inicial

$$\begin{cases} ax + 2ay = a \\ -ax - by = -5, \end{cases}$$

Agora, somando-as, obteremos

$$\begin{aligned} 2ay - by &= a - 5 \\ (2a - b)y &= a - 5. \end{aligned}$$

Por fim, para o sistema ter solução única, basta $2a - b \neq 0$, ou seja $2a \neq b$.

13. (Adaptado do vestibular da FAMECA $-$ 2012) Fazendo a soma da primeira com a terceira equação, obtemos $2x = p + 2$ ou simplesmente $x = \dfrac{p+2}{2}$. Agora, somando a primeira com a segunda, teremos $x + px = p + 1$ ou $x = \dfrac{p+1}{p+1}$. Se $p \neq -1$, então $x = 1$. Daí, voltando à relação anterior, $1 = \dfrac{p+2}{2}$ com $p = 0$. Assim, o sistema é equivalente à

$$\begin{aligned} 1 - y &= 0 \\ y &= 1 \\ 1 + y &= 2 \end{aligned}$$

A sua única solução é $(x, y) = (1, 1)$. Se $p = -1$, temos o sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ -x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Somando as duas últimas equações, temos $2y = 1$, ou seja, $y = 1/2$. Substituindo este valor na primeira equação, temos $x = -1/2$. Assim, o sistema é possível e determinado para dois valores de p e consequentemente $n = 2$.