Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02

Teorema do Sanduíche

Introdução ao Cálculo

Portal da Matemática
OBMEP

Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02
Teorema do Sanduíche

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se para todo $x \in (2, 4)$ vale que

$$2 - (x-3)^2 \leq f(x) \leq 2 + (x-3)^4$$

Calcule

$$\lim_{x \to 3} f(x).$$

Exercício 2. Sabendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, calcule $a = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(21x)}{7x}$.

Exercício 3. Sabendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, calcule $a = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(78x)}{13x}$.

Exercício 4. Se para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $11x \leq f(x) \leq x^2 + 9x + 1$, calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Exercício 5. Se para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $15x \leq f(x) \leq x^2 + 5x + 25$, calcule $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Exercício 6. Seja $a = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(5x)}$. Se $a = \frac{p}{q}$ é uma fração irredutível, calcule o valor de $p + q$. Dica: Use que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(8x)}{\text{tg}(9x)}$.

Exercício 8. Calcule $a = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \sin x + 5 \sin x \cdot \cos x}{\sin x}$.

Exercício 9. Calcule $a = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \sin x + 8 \sin x \cdot \cos x}{\sin x}$.

Exercício 10. Se $\lim_{x \to 0} \left(\frac{(\sin x)^3}{x^2 \sin(3x)} \right) = \frac{1}{a}$, determine o valor de a.

Exercício 11. Se $\lim_{x \to 0} \left(\frac{(\sin x)^6}{x^5 \sin(6x)} \right) = \frac{1}{a}$, determine o valor de a.

Exercício 12. Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x^3 + 1}.$$

Exercício 13. Demonstre que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Determine um inteiro positivo $b \geq 6$ para que $\lim_{x \to 0} \frac{x^b \sin(2x)}{(\sin x)^6} = 2$.

Exercício 15. Se $\lim_{x \to 0} \frac{x^{10} \sin(6x)}{(\sin x)^{11}} = a$, determine o valor de a.

Exercício 16. Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x - 1}$

Exercício 17. Suponha que para todo o inteiro positivo n o número S satisfaz as desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} &< S \\ \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} &> S. \end{aligned}$$

Determine o valor de S.

Exercício 18. Sejam a, b e c reais fixos e suponha que para todo x, $|ax^2 + bx + c| \leq |x|^3$. Prove que $a = b = c = 0$.

Exercício 19. Se $|f(x) - 10| \leq 5|x - 2|^3$ para todo x, determine o valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Exercício 20. Considere uma função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, com função derivada contínua em todos os pontos, tal que para todo inteiro positivo n vale que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}.$$

Encontre o valor de $f'(0)$.

Respostas e Soluções.

1. Como $\lim_{x\to 3}[2-(x-3)^2] = \lim_{x\to 3}[2+(x-3)^4] = 2$, pelo Teorema do Sanduíche, segue que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2.$$

2. Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(21x)}{21x} = 1$, temos $a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(21x)}{21x}\cdot\frac{21}{7}\right) = 3$.

3. Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(78x)}{78x} = 1$, temos $a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(78x)}{78x}\cdot\frac{78}{13}\right) = 6$.

4. Como $\lim_{x\to 1} 11x = \lim_{x\to 1}(x^2+9x+1) = 11$, pelo Teorema do Sanduíche segue que $\lim_{x\to 1} f(x) = 11$.

5. Como $\lim_{x\to 5} 15x = \lim_{x\to 5}(x^2+5x+25) = 75$, pelo Teorema do Sanduíche segue que $\lim_{x\to 5} f(x) = 75$.

6. Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(5x)} = 1$, temos $a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{4x}{5x}\right) = \frac{4}{5}$. Portanto $p+q=9$

7. Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(8x)}{8x} = \lim_{x\to 0}\frac{9x}{\sin(9x)} = 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(8x)}{\operatorname{tg}(9x)} &= \\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(8x)}{8x}\cdot\frac{9x}{\sin(9x)}\cdot\frac{8x}{9x}\cdot\frac{\cos(9x)}{\cos(8x)}\right) &= \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

8. Temos $a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x} + x^2 + 5\cos x\right) = 6$.

9. Temos $a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x} + x^2 + 8\cos x\right) = 9$.

10. Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$, temos $\frac{1}{a} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Portanto $a=3$.

11. Como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin(6x)} = 1$, temos $\frac{1}{a} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^6\cdot\left(\frac{6x}{\sin(6x)}\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Portanto $a=6$.

12. Como $\sin(1/x)$ é uma função limitada e

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3+1} = 0,$$

podemo concluir que o valor procurado é 0.

13. Como $\cos\frac{2}{x} \in [-1,1]$ e $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$, segue de uma das consequências dos Teorema do Confronto que $\lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{2}{x} = 0$.

14. Como $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^b\sin(2x)}{(\sin x)^6} &= \\ \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^6\cdot\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\cdot 2x^{b-6}\right) &= \\ \lim_{x\to 0} 2x^{b-6}.\end{aligned}$$

Basta escolhermos $b=6$.

15. Como $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{6x} = 1$, temos

$$a = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{11}\cdot\left(\frac{\sin(6x)}{6x}\right)\cdot 6\right) = 6.$$

16. Como $\cos x \in [-1,1]$, segue que

$$-\frac{1}{x-1} \le \frac{\cos x}{x-1} \le \frac{1}{x-1},$$

para $x>1$. Pelo Teorema do Sanduíche, como $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = 0$, segue que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x-1} = 0.$$

17. Como

$$1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

segue que

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} &< S \\ \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} &> S.\end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} &= \lim_{n\to\infty}(1-1/n)(2-1/n)\cdot 1/6 \\ &= 1/3 \\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} &= \lim_{n\to\infty}(1+1/n)(2+1/n)\cdot 1/6 \\ &= 1/3\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Confronto segue que $S = 1/3$.

18. Para $x \neq 0$, temos

$$0 \leq \left| a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right| \leq |x|.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{x \to 0} \left| a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right| = |a| = 0,$$

ou seja, $a = 0$. Usando essa informação, repetindo o argumento anterior, temos

$$0 \leq \left| b + \frac{c}{x} \right| \leq |x|^2.$$

Novamente pelo Teorema do Confronto podemos concluir que $b = 0$. Finalmente, de $|c| \leq |x|^3$ para todo x, usando o Teorema do Confronto podemos concluir que $c = 0$.

19. Como

$$0 \leq |f(x) - 10| \leq 5|x - 2|$$

e $\lim\limits_{x \to 2} |x - 2| = 0$, segue pelo Teorema do Sanduíche que $\lim\limits_{x \to 2} |f(x) - 10| = 0$, ou seja,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 10.$$

20. Pelo Teorema do Valor Médio, para cada n existe um c_n no intervalo $(1/(n+1), 1/n)$ tal

$$f'(c_n) = \frac{f(1/n) - f(1/(n+1))}{1/n - 1/(n+1)},$$

ou seja,

$$f'(c_n) = \frac{n}{n+2}.$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$, pela continuídade de $f'(x)$, podemos concluir que

$$f'(0) = 0.$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com