

Módulo Frações Algébricas

Exercícios

8º ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Simplifique as frações algébricas a seguir.

a) $\frac{24x^2yz}{12xyz}$.

b) $\frac{-3a^3b^2}{-3a^2b}$.

c) $\frac{32q^2p^3}{16qp^2}$.

Exercício 2. Simplifique as frações algébricas abaixo.

a) $\frac{y^2 - y}{y - 1}$.

b) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

c) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

d) $\frac{x^2 + 16x + 64}{2x + 16}$.

Exercício 3. A fração algébrica $\frac{6x - 18}{2x - 6}$ pode ser reduzida a um número inteiro. Que número é esse?

Exercício 4. Faça as multiplicações solicitadas, simplificando os resultados.

a) $\frac{5x^2}{4y} \cdot \frac{3y^4}{10x^3}$.

b) $\frac{x}{4} \cdot \frac{8}{x^2} \cdot \frac{x^2}{4}$.

c) $\frac{3k^2}{8mn^3} \cdot \frac{4m^2n}{3k^3}$.

Exercício 5. Resolva as divisões abaixo, simplificando os resultados.

a) $\frac{a + b}{2a} : \frac{a^2 - b^2}{a - b}$.

b) $\frac{a}{2} : \frac{a^2 + a}{4}$.

c) $\frac{x^2 - 4}{x + 4} : \frac{x + 2}{2x + 8}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Simplifique as frações algébricas abaixo.

a) $\frac{2a + 6y}{3a + 9y}$.

b) $\frac{2x - 4}{x^2 - 4}$.

c) $\frac{x^3 - x^2}{x - 1}$.

d) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2}$.

e) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

Exercício 7. Em certa viagem um automóvel consumiria 47 litros de gasolina. Devido a problemas mecânicos, a viagem terminou 32 quilômetros antes do previsto e o automóvel gastou somente 43 litros de gasolina. Determine:

a) quantos quilômetros teria a viagem toda?

b) quantos quilômetros por litro de gasolina esse automóvel faz?

Exercício 8. Os alunos de um colégio resolveram comprar uma camiseta para a gincana escolar. O total das camisetas seria 1.050 reais, mas na véspera da gincana, outros 9 alunos resolveram adquirir também as camisetas, sendo que o total passou a ser 1.428 reais. Quantos alunos compraram a camiseta e quanto custou cada camiseta?

Exercício 9. Resolva o produto das frações abaixo, simplificando o resultado.

$$\frac{x^2 - a^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x - a} \cdot \frac{x}{x - 1}$$

Exercício 10. Se $p + q + r = 5$ e $pq + pr + qr = 15$, determine o valor de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Exercício 11. Simplifique a fração $\frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2 - (x^3 - y^3 - z^3)^2}{y^3 + z^3}$.

Exercício 12. Se $xyz = 3$ e $x + y + z = 12$, determine $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}$.

Exercício 13. Simplifique a expressão $\frac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 + c^2 - 2ac - b^2)}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Qual é o valor da expressão $\frac{a^2 - 1}{a - 1}$, sendo $a = 2017$?

a) 1004.

b) 2004.

c) 2016.

d) 2017.

e) 2018.

Exercício 15. Seja $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 11$. Calcule $\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn}$.

Exercício 16. Sendo $1989^a = 13$ e $1989^b = 17$, determine o valor de $117^{\left(\frac{1-a-b}{2(1-b)}\right)}$.

Exercício 17. Simplifique a fração $\frac{x^4 + y^4 - 18x^2y^2}{x^2 - y^2 - 4xy}$.

Exercício 18. Simplifique a expressão $\frac{a^4 + b^4 - 6a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab}$.

Exercício 19. Determine o valor da expressão $\frac{2015^3 - 1}{1^2 + 2015^2 + 2016^2}$.

a) 1006.

b) 1007.

c) 1008.

d) 2014.

e) 2015.

Exercício 20. O maior inteiro n , tal que $\frac{n^2 + 37}{n + 5}$, também inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a:

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

Respostas e Soluções.

1.

$$a) \frac{24x^2yz}{12xyz} = 2x.$$

$$b) \frac{-3a^3b^2}{-3a^2b} = ab.$$

$$c) \frac{32q^2p^3}{16qp^2} = 2pq.$$

2.

$$a) \frac{y^2 - y}{y - 1} = \frac{y(y - 1)}{y - 1} = y.$$

$$b) \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1.$$

$$c) \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)^2} = \frac{a + b}{a - b}.$$

$$d) \frac{x^2 + 16x + 64}{2x + 16} = \frac{(x + 8)^2}{2(x + 8)} = \frac{x + 8}{2}.$$

$$3. \frac{6x - 18}{2x - 6} = \frac{6(x - 3)}{2(x - 3)} = 3.$$

4.

$$a) \frac{5x^2}{4y} \cdot \frac{3y^4}{10x^3} = \frac{3y^3}{8x}.$$

$$b) \frac{x}{4} \cdot \frac{8}{x^2} \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x}{2}.$$

$$c) \frac{3k^2}{8mn^3} \cdot \frac{4m^2n}{3k^3} = \frac{m}{2kn^2}.$$

5.

$$a) \frac{a + b}{2a} : \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{a + b}{2a} \cdot \frac{a - b}{(a + b)(a - b)} = \frac{1}{2a}.$$

$$b) \frac{a}{2} : \frac{a^2 + a}{4} = \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a(a + 1)} = \frac{2}{a + 1}.$$

$$c) \frac{x^2 - 4}{x + 4} : \frac{x + 2}{2x + 8} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 4} \cdot \frac{2(x + 4)}{x + 2} = 2(x - 2).$$

6.

$$a) \frac{2a + 6y}{3a + 9y} = \frac{2(a + 3y)}{3(a + 3y)} = \frac{2}{3}.$$

$$b) \frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \frac{2(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{2}{x + 2}.$$

$$c) \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{x^2(x - 1)}{x - 1} = x^2.$$

$$d) \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a + b)^3}{(a + b)^2} = a + b.$$

$$e) \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)^2} = \frac{a + b}{a - b}.$$

7.

a) supondo que o percurso completo tenha x quilômetros, o percurso realizado foi $(x - 32)$ quilômetros. Podemos escrever o consumo por quilômetro do automóvel de duas maneiras diferentes (percurso completo e percurso realizado), mas que têm o mesmo valor, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{x}{47} &= \frac{x - 32}{43} \\ 47(x - 32) &= 43x \\ 47x - 1504 &= 43x \\ 4x &= 1504 \\ x &= 376. \end{aligned}$$

Temos então que a viagem toda teria 376 quilômetros.

$$b) \frac{x}{47} = \frac{376}{47} = 8 \text{ quilômetros por litro.}$$

8. Podemos representar o preço de cada camiseta por duas frações algébricas diferentes, mas que devem dar o mesmo resultado:

$$\begin{aligned} \frac{1050}{x} &= \frac{1428}{x + 9} \\ 1428x &= 1050x + 9450 \\ 378x &= 9450 \\ x &= \frac{9450}{378} \\ x &= 25. \end{aligned}$$

Temos então que a quantidade de alunos que adquiriu a camiseta é $25 + 9 = 34$, sendo o custo de cada uma igual a $\frac{1050}{25} = 42$ reais.

9. Sendo P o produto, temos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 - a^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x - a} \cdot \frac{x}{x - 1} \\ &= \frac{(x + a)(x - a)}{x + 1} \cdot \frac{(x - 1)^2}{x - a} \cdot \frac{x}{x - 1} \\ &= \frac{(x + a)(x - a)(x - 1)^2x}{(x + 1)(x - a)(x - 1)} \\ &= \frac{x(x + a)(x - 1)}{x + 1}. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \\ \frac{rq + pr + pq}{pqr} &= \\ \frac{15}{5} &= 3. \end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2 - (x^3 - y^3 - z^3)^2}{y^3 + z^3} =$$

$$\frac{(x^3 + y^3 + z^3 + x^3 - y^3 - z^3)(x^3 + y^3 + z^3 - x^3 + y^3 + z^3)}{y^3 + z^3} =$$

$$\frac{2x^3(2y^3 + 2z^3)}{y^3 + z^3} =$$

$$\frac{4x^3(y^3 + z^3)}{y^3 + z^3} =$$

$$4x^3.$$

12.

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} =$$

$$\frac{z + y + x}{xyz} =$$

$$\frac{12}{3} = 4.$$

13. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\frac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 + c^2 - 2ac - b^2)} =$$

$$\frac{(a^2 - (b + c)^2)(a + b - c)}{(a + b + c)((a - c)^2 - b^2)} =$$

$$\frac{(a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)}{(a + b + c)(a + b - c)(a - b - c)} = 1.$$

14. $\frac{a^2 - 1}{a - 1} = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a - 1} = a + 1 = 2018$. Resposta E.

15. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn} =$$

$$\frac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp} =$$

$$\frac{(m + n + p)^2 - 2(mn + mp + np)}{mnp} =$$

$$\frac{6^2 - 2 \cdot 11}{2} =$$

$$\frac{36 - 22}{2} =$$

$$\frac{14}{2} = 7.$$

16. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos analisar alguns fatos importantes:

I. Como $1989^b = 17$, temos:

$$117 = \frac{1989}{17}$$

$$= \frac{1989}{1989^b}$$

$$= 1989^{1-b}.$$

Ou seja, $117^{\frac{1}{1-b}} = 1989$.

II. Como $1989^a = 13$ e $1989^b = 17$, temos:

$$1989^a \cdot 1989^b = 13 \cdot 17$$

$$1989^{a+b} = 13 \cdot 17$$

$$\frac{1989^{a+b}}{1989^{a+b}} = \frac{1989}{13 \cdot 17}$$

$$1989^{1-a-b} = 9.$$

Por fim, temos:

$$117^{\left(\frac{1-a-b}{2(1-b)}\right)} =$$

$$\left[\left(117^{\frac{1}{1-b}}\right)^{1-a-b}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(1989^{1-a-b}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{2}} = 3.$$

17. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\frac{x^4 + y^4 - 18x^2y^2}{x^2 - y^2 - 4xy} =$$

$$\frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 16x^2y^2}{x^2 - y^2 - 4xy} =$$

$$\frac{(x^2 - y^2)^2 - (4xy)^2}{x^2 - y^2 - 4xy} =$$

$$\frac{(x^2 - y^2 + 4xy)(x^2 - y^2 - 4xy)}{x^2 - y^2 - 4xy} =$$

$$x^2 - y^2 + 4xy.$$

18. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\frac{a^4 + b^4 - 6a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab} =$$

$$\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{a^2 - b^2 + 2ab} =$$

$$\frac{(a^2 - b^2)^2 - (2ab)^2}{a^2 - b^2 + 2ab} =$$

$$\frac{(a^2 - b^2 + 2ab)(a^2 - b^2 - 2ab)}{a^2 - b^2 + 2ab} =$$

$$a^2 - b^2 - 2ab.$$

19. (Extraído da OBM - 2016)

$$\frac{2015^3 - 1}{1^2 + 2015^2 + 2016^2} =$$

$$\frac{(2015 - 1)(2015^2 + 2015 + 1)}{1^2 + 2015^2 + (2015 + 1)^2} =$$

$$\frac{(2015 - 1)(2015^2 + 2015 + 1)}{1^2 + 2015^2 + 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1} =$$

$$\frac{(2015 - 1)(2015^2 + 2015 + 1)}{2(2015^2 + 2015 + 1)} =$$

$$\frac{2014}{2} = 1007.$$

Resposta B.

20. (Extraído do Colégio Naval - 2014) Vamos "melhorar" a fração algébrica:

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 + 37}{n + 5} = \\ & \frac{(n + 5)(n - 5) + 25 + 37}{n + 5} = \\ & \frac{(n + 5)(n - 5)}{n + 5} + \frac{62}{n + 5} = \\ & (n - 5) + \frac{62}{n + 5}. \end{aligned}$$

Agora temos uma soma que deve ser inteira. Como a primeira parcela é inteira, já que n é inteiro, então a segunda também deve ser inteira. Para isso, $(n + 5)$ deve dividir 62 e o maior n , para que isso ocorra é 57. Temos então que a soma dos algarismos do maior n é $5 + 7 = 12$. Resposta D.